XX устная городская математическая олимпиада для 6-7 классов
09.04.2023
6 класс

1. **Семь дробей**. Найдутся ли семь различных правильных несократимых дробей со знаменателями от 2 до 6 и с суммой 4?

А. Шаповалов

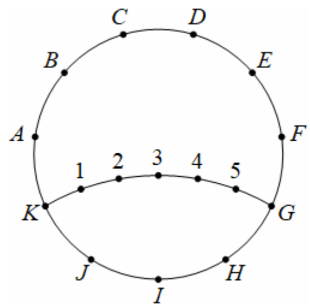
Ответ: найдутся.

Решение. Например, $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}=4.$

Пример помогают построить следующие соображения. Всего есть 11 положительных правильных несократимых дробей со знаменателями от 2 до 6: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, 5/6. Их сумма равна 5,5, поэтому нужно убрать четыре из них с суммой 1,5. Так как 1/3 + 1/6 = 0,5, то осталось убрать две дроби с суммой 1, например, 1/4 и 3/4.

Отметим, что в условии не оговорено, что каждая дробь положительная, но примера с отрицательными дробями не существует.

2. **Метро**. Метро состоит из кольцевой линии и хорды (см. рисунок). Между каждыми двумя соседними станциями ехать по времени одинаково, на пересадку между кольцевой линией и хордой время не тратится. Вася живёт на одной из шести станций над хордой, а школа расположена на одной из пяти станций внутри хорды. От Васиного дома до школы есть два различных кратчайших маршрута, причём хотя бы в одном из них нужно ехать по кольцевой линии по часовой стрелке. На каких станциях расположены Васин дом и школа?



Т. Корчёмкина

Ответ: Васин дом – на станции F, школа – на станции 1.

Решение. На схеме можно выделить три цикла. Обозначим кольцевую линию через X, цикл из хорды и станций над ней – через Y, а цикл из хорды и станций под ней – через Z.

На пути из дома в школу Вася должен доехать до одной из станций G или K и там пересесть на хорду. У него есть четыре варианта добраться до пересадочной станции:

1) по часовой стрелке до станции G;
2) по часовой стрелке до станции K;
3) против часовой стрелки до станции G;
4) против часовой стрелки до станции K.

Заметим, что в циклах X и Y нечётное количество станций, поэтому не могут быть кратчайшими одновременно маршруты 1 и 3, 2 и 4, 1 и 4, а также 2 и 3 (в каждой из этих пар чётности длин маршрутов различны). Маршруты 3 и 4 не могут быть одновременно кратчайшими, так как в них используется движение против часовой стрелки по X. Следовательно, кратчайшими являются маршруты 1 и 2. Цикл Z состоит из десяти станций, и по нему от станции G до школы одинаково ехать по часовой стрелке и против часовой стрелки, значит, школа находится на станции 1. Тогда Вася живёт на станции F, поскольку от любой другой станции над хордой путь до станции 1 ближе через станцию K.

3. **Шахматный турнир**. В турнире участвовали десять шахматистов. Каждый сыграл с каждым два раза: один раз белыми и один раз чёрными, причём какую-то из этих партий он выиграл, а другую проиграл (ничьих не было). Могло ли оказаться так, что половину всех партий выиграли белые, а половину – чёрные?

Б. Френкин

Ответ: не могло.

Решение. В партиях каждых двух шахматистов было либо две победы белых, либо две победы чёрных. Значит, общее число побед у белых чётно. Количество пар шахматистов: $\frac{10\cdot 9}{2}$ = 45, поэтому если бы половину всех партий выиграли белые, то у них было бы 45 побед, но это число нечётное. Следовательно, такого быть не могло.

4. **Первые цифры**. Серёжа выписал все натуральные числа от 1 до N и заметил, что ровно 40% из них начинаются с единицы. Докажите, что и N начинается с единицы.

С. Губанов

Решение. Предположим, что N – это k-значное число, начинающееся не с единицы. Среди однозначных чисел с единицы начинается одно число, среди двузначных – десять, среди трёхзначных – сто, и так далее. Следовательно, всего выписано $M = 1+10+100+\ldots+1\underbrace{00\ldots0}_{k-1} = \underbrace{11,,1}_{k}$ чисел, начинающихся с единицы. Заметим, что число M нечётное и по условию оно составляет 40% от N, то есть $N = 2{,}5M$ – не целое число. Противоречие.

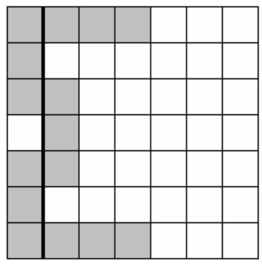
Числа N, удовлетворяющие условию, действительно существуют. Это числа вида 148148…1480. Приводить пример таких чисел от школьников не требуется.

5. **Равные куски**. Некоторые клетки доски размером 7×7 покрашены в чёрный цвет, образуя чёрный многоугольник. Его разрезали по прямой, идущей по линии сетки. Мог ли он распасться на пять равных фигур?

А. Шаповалов

Ответ: мог.

Решение. Пример многоугольника показан на рисунке. При разрезании по вертикальной жирной линии он распадается на пять прямоугольников размером 1×3.



6. **Тёзки**. Ученики писали олимпиаду в двух залах. Ни в одном из залов не было трёх тёзок. У 100 учеников были два тёзки в другом зале. У 144 учеников было хотя бы по одному тёзке в каждом зале. У скольких учеников было ровно по одному тёзке в каждом зале? (*Напомним, что тёзками считаются люди с одинаковыми именами*.)

А. Шаповалов

Ответ: у 88 учеников.

Решение. Понятно, что на олимпиаде не могло быть группы более чем из четырёх тёзок, иначе трое из них оказались бы в одном зале, что противоречит условию.

Если у ученика не было тёзок или был всего один тёзка, то этот ученик не входит ни в одну сумму из условия.

Если на олимпиаде было четыре тёзки, то они сидели по два человека в зале и каждый из них входит в обе суммы.

Если было ровно три тёзки, то один из них сидел в одном зале, а другие двое – в другом. Тогда один ученик из тройки входит в первую сумму, а двое – во вторую, поэтому вторая сумма больше первой как раз на число троек тёзок, то есть всего было 144 – 100 = 44 тройки. Но ровно по одному тёзке в обоих залах было только у двоих учеников из каждой тройки, которые сидели в одном зале. Следовательно, таких учеников было $2\cdot 44 = 88$.

7. **Игра с числами**. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя выписывает на доску $N \geq 3$ чисел. Васе разрешается выбрать несколько чисел на доске и заменить каждое из них на среднее арифметическое выбранных чисел. При каких N Вася за несколько ходов сможет сделать все числа равными, независимо от того, какие числа выпишет Петя?

USA Mathematical Talent Search, 2022

Ответ: при любых составных N.

Решение. Пусть число N составное, то есть $N = ab$, где a и b – натуральные числа, большие 1. Тогда Вася может записать Петины числа в виде таблицы размером $a \times b$. Сначала он заменит на среднее арифметическое числа в каждой строке. При этом все столбцы таблицы станут одинаковыми. Проделав после этого разрешённую операцию в каждом столбце, Вася получит таблицу, все числа в которой равны.

Если N простое, то Петя может выписать, например, $N - 1$ единицу и одну двойку. Сумма этих чисел равна $N + 1$, а так как после каждого хода Васи сумма чисел на доске не меняется, то ему нужно получить в итоге числа $\frac{N+1}{N}$. Однако каждый раз он выбирает меньше N чисел, поэтому в знаменателе получаемых им чисел (в несократимом виде) не может появиться никакое число, кратное N.

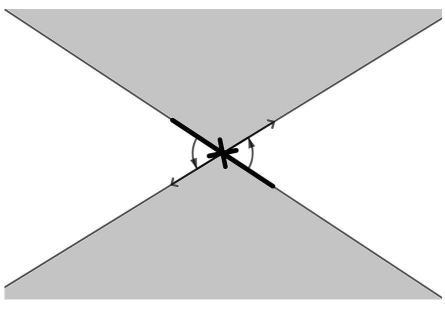
8. **Перекрёстки**. В городе Нью-Васюки 2023 прямолинейные улицы. Известно, что каждые две улицы пересекаются, но никакие три улицы не пересекаются в одной точке. Докажите, что мэр Нью-Васюков может назначить на каждом перекрёстке приоритет улиц (одну назвать главной, а другую – второстепенной) так, чтобы при движении вдоль любой улицы от начала до конца приоритеты этой улицы на перекрёстках чередовались.

Junior Balkan Mathematical Olympiad, Shortlist 2019

Решение 1. Возьмём одну из улиц l и назначим на ней приоритеты так, чтобы они чередовались. Каждая из остальных улиц имеет пересечение с l, где приоритет для этой улицы уже определён (он противоположен тому, который назначен здесь для l), поэтому для всех остальных перекрёстков на ней приоритеты назначаются однозначно. Осталось доказать, что при этом не найдётся двух улиц, на пересечении которых приоритеты одинаковы.

Рассмотрим две произвольные улицы l_1 и l_2, пусть они пересекаются в точке A, первая из них пересекает l в точке B, а вторая – в точке C. Сделаем обход треугольника ABC по периметру: начнём с точки A, пойдём от неё к вершине B, потом к C, а затем снова к A. Так как каждая из остальных улиц, пересекающих контур треугольника ABC, пересекает его в двух точках, то при обходе мы пройдём чётное число перекрёстков, не считая вершины треугольника. На каждом таком перекрёстке приоритет будет меняться, а в вершинах B и C он сменится по два раза. Следовательно, перед возвращением в вершину A приоритет поменяется чётное число раз, и в вершине A приоритет улицы l_2 будет отличаться от приоритета l_1.

Решение 2. Воспользуемся известным фактом: если плоскость разбита прямыми на части, то их можно раскрасить в два цвета так, чтобы части одного цвета не граничили по отрезку (несложно доказывается по индукции). Сделаем такую раскраску в белый и чёрный цвета и рассмотрим только белые части. Будем обходить каждую из них по периметру по часовой стрелке и на каждом перекрёстке назначать приоритеты следующим образом: улицу, по которой подошли к перекрёстку, назовём главной, а на которую перешли – второстепенной.



Рассмотрим произвольный перекрёсток. Он является вершиной для четырёх частей, две противоположные из которых белые. При обходе каждой из них мы одинаково назначили приоритеты для обеих улиц (см. рисунок, где жирным обозначена главная улица). Кроме того, при движении вдоль любой улицы отрезок между каждыми двумя соседними перекрёстками является стороной белой части, поэтому на обоих перекрёстках мы назначили приоритеты так, что для данной улицы они различны.

Следовательно, полученная схема удовлетворяет условию.

Доказательство используемого факта можно посмотреть, например, на https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=58307.

Комментарий для жюри. Если для решения задачи используется индукция по числу улиц, то надо внимательно проверять шаг индукции. Необходимо убедиться, что добавление улицы не нарушает условие на пересечениях остальных улиц.

9. **Верёвки на деревьях**. Вдоль дороги стоят 100 деревьев через каждый метр. Некоторые пары деревьев связаны верёвками, каждые два дерева связаны не более чем одной верёвкой. Оказалось, что нет верёвки, которая находится строго между концами какой-то другой верёвки. Какое наибольшее количество верёвок может быть?

Фестиваль юных математиков, 2013

Ответ: 197 верёвок.

Решение. *Оценка*. Пронумеруем деревья числами от 1 до 100. Тогда каждая верёвка задаётся двумя числами – номерами деревьев, к которым привязаны её концы. Вычислим для каждой верёвки сумму этих двух чисел и заметим, что не может быть двух верёвок с равными суммами, иначе одна из них находилась бы строго между концами другой. Так как суммы могут принимать всего 197 значений (от 3 до 199), то количество верёвок не превосходит 197.

Пример. Соединим верёвками каждые два соседних дерева, а также каждые два дерева, между которыми стоит ровно одно дерево. Всего будет использовано $99+98=197$ верёвок.

Существуют и другие примеры. В частности, можно связать верёвками оба крайних дерева со всеми остальными. Тогда также получим $98+98+1=197$ *верёвок.*