Девятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 16 апреля 2023 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Ю. Блинков*) В трапеции $ABCD$: $AD = 2BC$, M — середина боковой стороны AB. Докажите, что прямая BD проходит через середину отрезка CM.

Решение. *Первый способ.* Пусть K — середина диагонали BD (см. рис. 8–9.1а). Тогда MK — средняя линия треугольника ABD, то есть $MK = 0{,}5AD = BC$ и прямая MK параллельна AD и BC. Следовательно, $MBCK$ — параллелограмм и диагональ BK делит CM пополам.

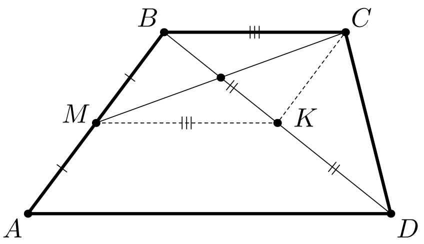

Рис. 8–9.1а

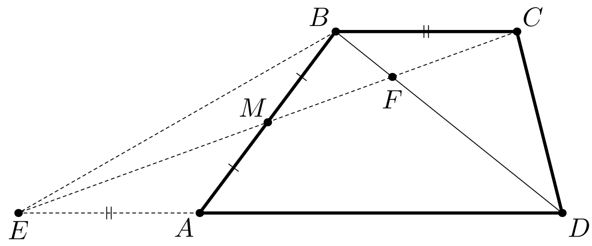

Рис. 8–9.1б

Второй способ. Пусть прямые CM и AD пересекаются в точке E (см. рис. 8–9.1б). Тогда треугольники CMB и EMA равны по стороне и прилежащим к ней углам, откуда $EM = CM$ и $EA = CB$. Кроме того, в трапеции $EBCD$ точка пересечения диагоналей F делит их в отношении оснований, то есть $EF : CF = ED : BC = 3 : 1$. Следовательно, F — середина CM, что и требовалось.

2. (*Т. Фейгина*) Есть квадратный лист бумаги. Как получить прямоугольный лист бумаги с отношением сторон, равным $\sqrt{2}$? (*Инструментов никаких нет, лист можно только сгибать.*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что сторона квадрата равна 1.

Первый способ. Заметим, что достаточно построить на одной из сторон этого квадрата отрезок, равный $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Покажем, как построить такой отрезок.

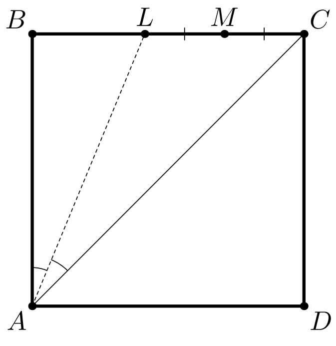

Рис. 8–9.2а

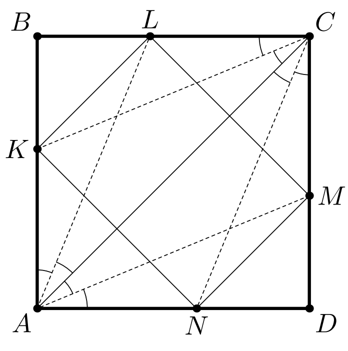

Рис. 8–9.2б

Пусть дан квадрат $ABCD$ (см. рис. 8–9.2а). Перегнем его сначала по диагонали AC, а затем построим биссектрису AL треугольника BAC, совместив стороны соответствующего угла. Поскольку биссектриса делит противолежащую сторону треугольника в отношении прилежащих сторон, то $BL : LC = AB : AC = 1 : \sqrt{2}$, откуда $1 = BL + BL\sqrt{2}$, то есть $BL = \sqrt{2} - 1$, а $CL = 2 - \sqrt{2}$. Совместив точки C и L, поделим отрезок CL пополам, то есть построим M — его середину. Тогда $BM = 1 - 0,5(2 - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, что и требовалось.

Второй способ. Аналогично первому способу построим биссектрисы углов BAC, BCA, CAD и ACD (см. рис. 8–9.2б). Тогда стороны четырёхугольника $KLMN$ параллельны диагоналям квадрата $ABCD$, то есть $KLMN$ — прямоугольник. Кроме того, $KL = BL\sqrt{2}$, а $LM = CL\sqrt{2}$, то есть $KL : LM = BL : LC = 1 : \sqrt{2}$. Следовательно, прямоугольник $KLMN$ — искомый.

3. (*Д. Мухин*) Треугольник ABC вписан в окружность. M — точка дуги BC (не содержащей A); M_1 — симметрична M относительно стороны BC. Докажите, что AM_1 делится пополам окружностью, проходящей через середины сторон треугольника ABC.

Решение. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, X — середина AM_1 (см. рис. 8–9.3). Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 и X лежат на одной окружности.

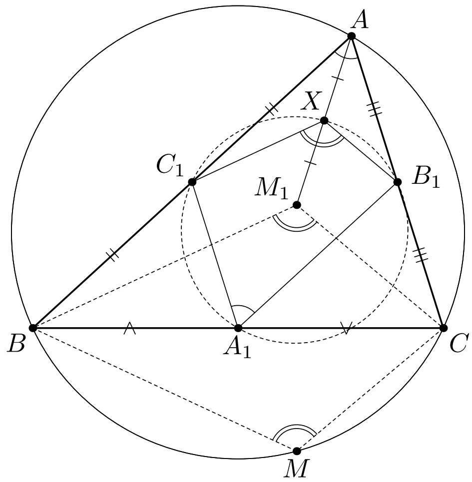

Рис. 8–9.3

Из свойства средней линии треугольника следует, что $AC_1A_1B_1$ — параллелограмм, то есть $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_1AB_1 = \angle CAB$. Кроме того, в силу симметрии, $\angle CM_1B = \angle CMB = 180^\circ - \angle CAB$, учитывая, что четырехугольник $ABMC$ — вписанный. Осталось заметить, что C_1X и B_1X параллельны BM_1 и CM_1 как средние линии треугольников BAM_1 и CAM_1 соответственно, то есть $\angle C_1XB_1 = \angle BM_1C = 180^\circ - \angle C_1AB_1$, откуда и следует утверждение задачи.

Комментарий.

Также можно было использовать гомотетию с центром в точке A и коэффициентом 2. Она переводит точку A_1 в точку D — вершину параллелограмма $ABDC$, а точки C_1 и B_1 — в точки B и C соответственно, то есть окружность, проходящую через середины сторон треугольника ABC, — в окружность, симметричную описанной окружности треугольника относительно прямой BC. Остается заметить, что точка M_1 (образ X при указанной гомотетии), на ней лежит.

4. (*Г. Забазнов*) Пусть I — центр вписанной окружности w треугольника ABC, касающейся сторон AB и AC в точках E и F соответственно. Прямые, проходящие через E и F параллельно AI, пересекают прямые BI и CI в точках P и Q соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника IPQ, лежит на прямой BC.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника PIQ, R — точка касания w со стороной BC (см. рис. 8.9–4). Докажем, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника PRQ. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle PIQ = \angle BIC = 90^\circ + \alpha$, то есть $\angle POQ = 2(180^\circ - \angle PIQ) = 180^\circ - 2\alpha$. Кроме того, в силу симметрии и параллельности, $\angle PRB = \angle PEB = \angle IAB = \angle IAC = \angle QFC = \angle QRC = \alpha$, то есть $\angle PRQ = 180^\circ - 2\alpha = \angle POQ$, откуда и следует искомое. Заметим, что прямая BC содержит биссектрису внешнего угла R треугольника PRQ. Тогда эта прямая повторно пересекает описанную окружность треугольника PRQ в середине дуги PRQ, то есть в точке, равноудаленной от P и Q. Но точка O также лежит на этой окружности, равноудалена от P и Q и лежит с точкой R в одной полуплоскости относительно прямой PQ. Следовательно, O — середина дуги PRQ и лежит на отрезке BC, что и требовалось.

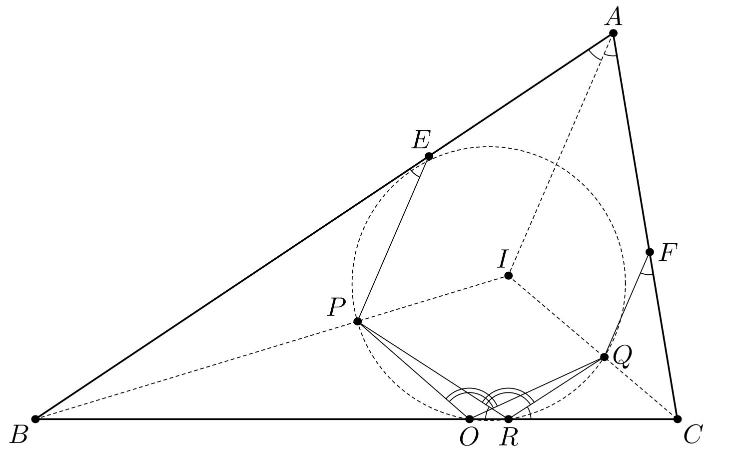

Рис. 8–9.4

5. (*К. Аполонская*) Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, $\angle A = 60^\circ$, $AB < AC$, медиана AM пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K; L — середина дуги BC описанной окружности, не содержащей точку A; прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EHL = \angle ABK$.

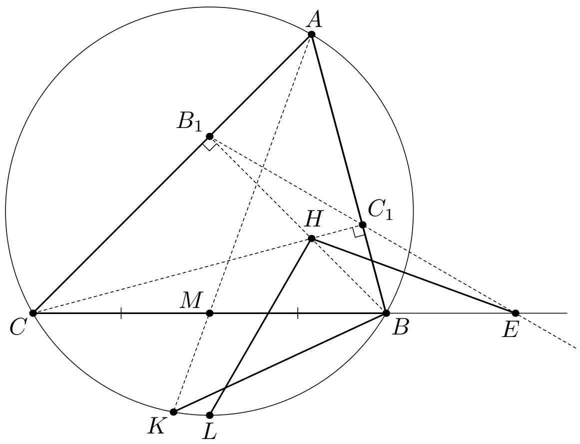

Рис. 8–9.5а

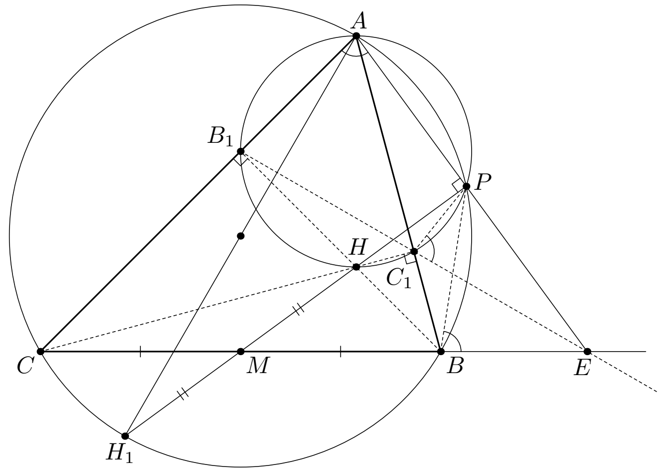

Рис. 8–9.5б

Решение. Рассмотрим рис. 8–9.5а. При решении будем использовать следующие факты:

Факт 1. MH и AE перпендикулярны.

Факт 2. EH и AK перпендикулярны.

Факт 3. Если $\angle A = 60^\circ$, то LH и B_1C_1 перпендикулярны.

Докажем **факт 1.** Пусть M — середина BC, H_1 — точка, симметричная H относительно M. Тогда она лежит на окружности, описанной около треугольника ABC и диаметрально противоположна точке A (см. рис. 8–9.5б). Следовательно, проекция P точки A на прямую MH лежит на пересечении двух окружностей с диаметрами AH и AH_1, то есть описанных окружностей треугольников AB_1C_1 и ABC.

Осталось доказать, что A, P и E лежат на одной прямой. Это можно сделать, например, так.

Используя вписанные четырехугольники PAB_1C_1 и $PACB$, получим: $\angle PC_1E = \angle PAC = \angle PBE$, то есть четырехугольник PC_1BE также вписанный. Кроме того, $\angle APC_1 = 180^\circ - \angle AB_1C_1 = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle EPC_1$, учитывая, что B_1C_1BC — тоже вписанный. Следовательно, A, P и E лежат на одной прямой, что и требовалось.

Теперь докажем **Факт 2.**

Рассмотрим треугольник MAE (см. рис. 8–9.5в). Из факта 1 следует, что H — его ортоцентр. Тогда EH и AM перпендикулярны, что и требовалось.

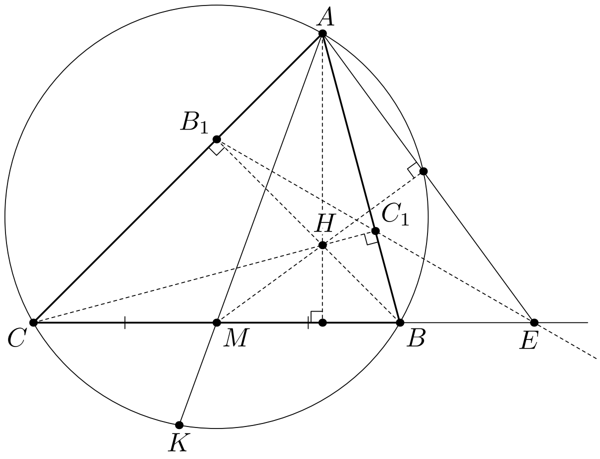

Рис. 8–9.5в

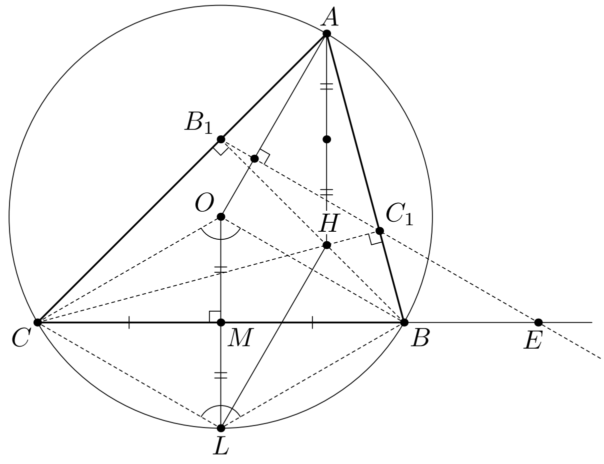

Рис. 8–9.5г

И, наконец, докажем **факт 3.**

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\angle A = 60^\circ$, то $\angle BOC = 120^\circ = \angle BLC$, то есть O и L симметричны относительно прямой BC (см. рис. 8–9.5г). Используя, что расстояние от вершины до ортоцентра в два раза больше, чем от центра описанной окружности до противолежащей стороны, получим, что $AOLH$ — параллелограмм, то есть LH и AO — параллельны. Осталось воспользоваться тем, что прямые AO и B_1C_1 перпендикулярны.

Вернемся к решению задачи. Пусть S — точка пересечения прямых AK и B_1C_1 (см. рис. 8–9.5д).

Из фактов 2 и 3 следует, что $\angle EHL = \angle ASE$, как тупые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Кроме того, $\angle ABK = \angle CBK + \angle ABC = \angle CAK + \angle AB_1C_1$. Осталось воспользоваться теоремой о внешнем угле для треугольника ASB_1.

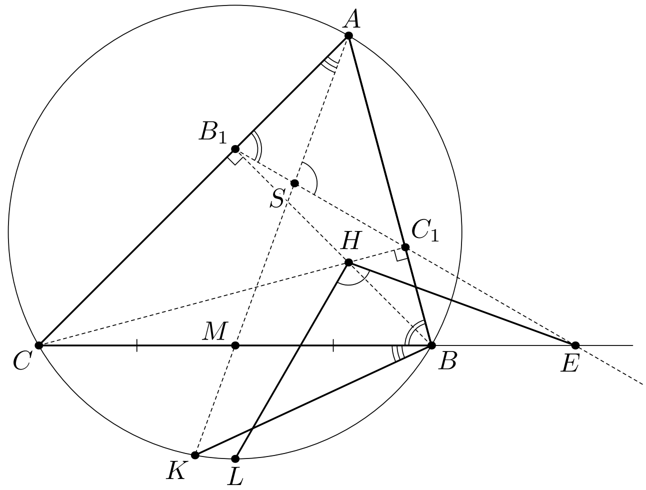

Рис. 8–9.5д

Комментарии.

1. *При доказательстве того, что точки A, P и E лежат на одной прямой можно было использовать следующие утверждения.*

А. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Тогда окружности, описанные около этих треугольников имеют общую точку (точка Микеля).

Б. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F. Тогда точка Микеля для прямых, содержащих стороны четырехугольника, лежит на отрезке EF.

Про точку Микеля можно прочитать, например, Ю.А. Блинков, Е.С. Горская «Вписанные углы».

2. *Также для доказательства этого утверждения можно использовать окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, ABC, окружность с диаметром BC и их попарные радикальные оси, которые пересекаются в их радикальном центре E.*

Про радикальные оси можно прочитать, например, В.В. Прасолов «Задачи по планиметрии», глава 3.

3. *Про свойства точки P можно прочитать, например,*

https://geometry.ru/articles/p-point.pdf.

6. (*И. Кухарчук*) Дана окружность Ω, касающаяся стороны AB угла BAC и лежащая вне этого угла. Рассматриваются окружности w, вписанные в угол BAC. Общая внутренняя касательная к Ω и w, отличная от AB, касается w в точке K. Пусть L — точка касания w и AC. Докажите, что все такие прямые KL проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности w.

Решение. Пусть O — центр окружности Ω, P — точка касания Ω и стороны AB, E и X — точки пересечения общей внутренней касательной к Ω и w с прямыми AB и AC соответственно, Q — точка касания с Ω касательной, параллельной AC, A_1 — точка пересечения этой касательной с лучом AB. Рассмотрим случай, при котором окружность w вписана в треугольник AXE (см. рис. 8.9–6а). Случай, при котором w является вневписанной окружностью этого треугольника, разбирается аналогично.

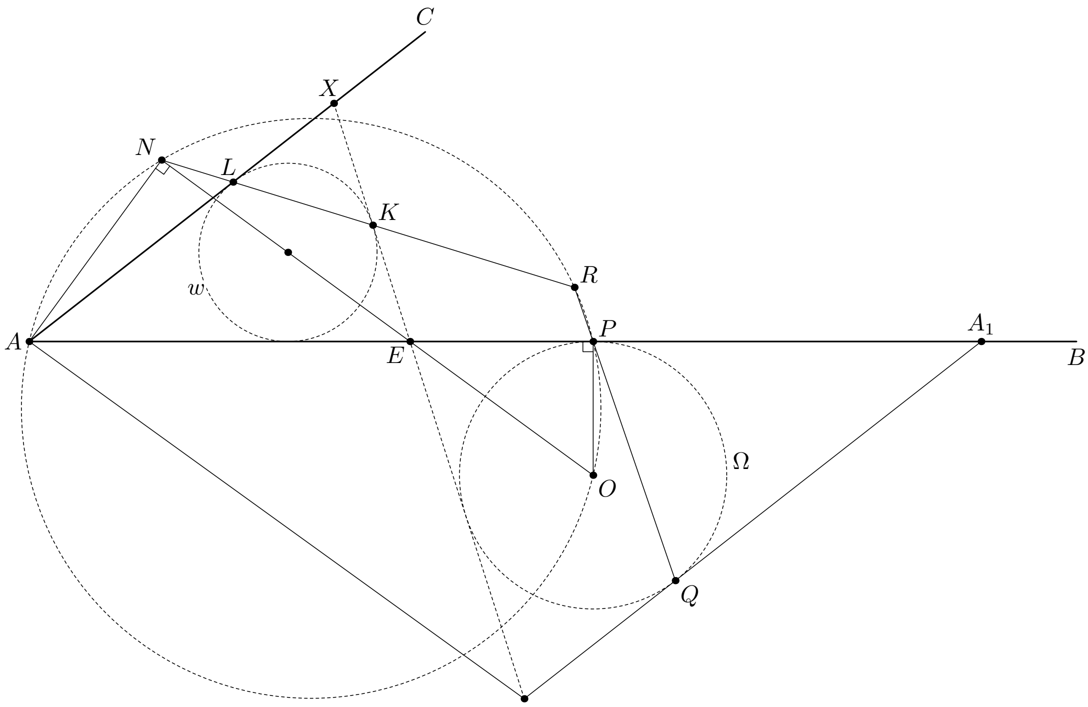

Рис. 8–9.6а

Достаточно будет доказать, что прямые KL и PQ пересекаются в точке R, лежащей на окружности s, построенной на AO, как на диаметре. Действительно, поскольку прямая PQ и окружность s — фиксированы, то фиксировано и их пересечение, то есть точка, лежащая на прямой KL.

Воспользуемся следующим **фактом** (см. рис. 8–9.6б).

Пусть M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC, K — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой MN. Тогда $\angle AKC = 90°$.

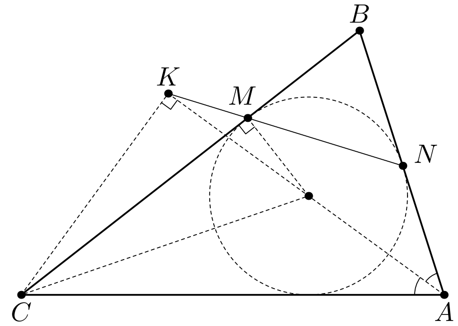

Рис. 8–9.6б

В данном случае, прямая KL пересекается с биссектрисой угла E в такой точке N, что $\angle ANE = 90^\circ$, то есть в точке, лежащей на окружности s. Докажем, что $\angle PRN = 180^\circ - \angle NAP = 90^\circ + 0{,}5\angle XEA$.

Заметим, что LK и PQ перпендикулярны биссектрисам углов X и A_1, то есть биссектрисам углов X и A треугольника AXE, в силу параллельности биссектрис углов A и A_1.

Осталось заметить, что угол между биссектрисами этих углов равен $90^\circ + 0{,}5\angle XEA$.

Комментарии.

1. *Факт, который мы использовали в решении, иногда называют «задача 255» (по ее номеру в учебнике И.Ф. Шарыгина). Доказать его можно, например, показав, что точки C, K, M и I (центр вписанной окружности) лежат на одной окружности.*

2. *При рассмотрении другого случая расположения окружности w вместо указанного факта потребуется использовать аналогичный. Сформулируем его.*

Пусть M и N — точки касания вневписанной окружности со стороной AC и продолжением стороны BC треугольника ABC, K — точка пересечения биссектрисы внешнего угла A с прямой MN. Тогда $\angle AKB = 90^\circ$.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский.

Решения задач

10–11 класс

1. (*Ю. Блинков*) В треугольнике ABC: $\angle B = 60^\circ$, O — центр описанной окружности. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W. Докажите, что OW касается окружности, описанной около треугольника BOL.

Решение. *Первый способ.* Заметим, что точки O и W симметричны относительно прямой AC (см. рис. 10–11.1). Действительно, $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ = 180^\circ - \angle ABC = \angle AWC$. Кроме того, $OA = OC$ и $WA = WC$, откуда и следует искомое. Из доказанного следует, что $\angle WOL = \angle LWO$. Но $\angle LWO = \angle BWO = \angle OBW$. То есть $\angle WOL = \angle OBL$, откуда и следует, что OW — касательная к окружности, описанной около треугольника BOL.

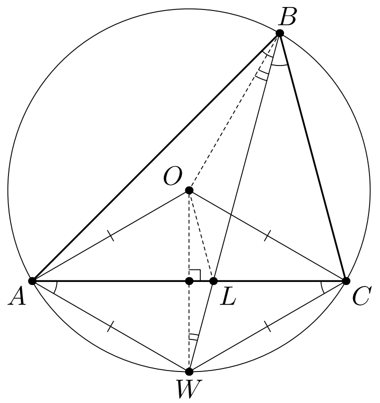

Рис. 10–11.1

Второй способ. Докажем, что $WO^2 = WL \cdot WB$, откуда и будет следовать утверждение задачи. В первом способе решения мы фактически доказали, что $AOCW$ — ромб с углом 120°, то есть треугольник OCW — равносторонний и $WO = WC$ (см. рис. 10–11.1). Кроме того, $\angle WCL = \angle WCA = \angle WBA = \angle WBC$, то есть WC — касательная к окружности, описанной около треугольника BLC. Следовательно, $WC^2 = WL \cdot WB$. Учитывая, что $WO = WC$, получим требуемое.

2. (*П. Кожевников*) Точки X_1 и X_2 движутся по фиксированным окружностям с центрами O_1 и O_2 соответственно так, что лучи O_1X_1 и O_2X_2 сонаправлены. Найдите ГМТ точек пересечения прямых O_1X_2 и O_2X_1.

Ответ: объединение прямой O_1O_2 и окружности с центром в точке M. При этом точка M делит отрезок O_1O_2 в отношении радиусов, а радиус окружности равен $\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, где R_1 и R_2 — радиусы данных окружностей.

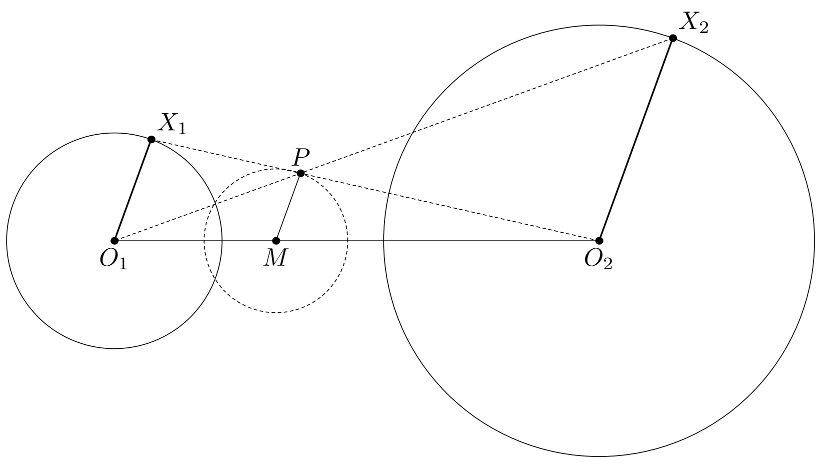

Рис. 10–11.2

Решение. Поскольку указанные прямые могут совпадать, то все точки прямой O_1O_2 удовлетворяют условию. Теперь рассмотрим невырожденный случай. Из условия следует, что $O_1X_1X_2O_2$ — трапеция или параллелограмм (в случае равенства окружностей). Пусть P — точка пересечения O_1X_2 и O_2X_1 (см. рис. 10–11.2), M — точка на отрезке O_1O_2 такая, что прямая PM параллельна основаниям трапеции (в случае параллелограмма M — середина O_1O_2). Тогда $\frac{O_1M}{O_2M} = \frac{PX_1}{PO_2} = \frac{R_1}{R_2}$, а $\frac{MP}{O_2X_2} = \frac{O_1M}{O_1O_2} = \frac{R_1}{R_1+R_2}$, откуда $MP = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, то есть все такие точки P лежат на окружности с фиксированным центром M и радиусом $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

Осталось показать, что все точки такой окружности могут быть пересечением указанных прямых. Рассмотрим произвольную точку P указанной окружности. Проведем через точку O_1 луч, сонаправленный MP. Пусть X_1 точка пересечения этого луча с прямой O_2P. Тогда из подобия треугольников PO_2M и $X_1O_2O_1$ следует, что $O_1X_1 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_2+R_1}{R_2} = R_1$, то есть точка X_1 лежит на первой окружности. Выполнив аналогичное построение и рассуждение для точки X_2, получим требуемое.

Комментарий.

В решении можно было использовать, что отрезок, параллельный основаниям трапеции с концами на боковых сторонах и проходящий через точку пересечения диагоналей, равен среднему гармоническому оснований.

3. (*Г. Филипповский*) В остроугольном треугольнике ABC прямая OI, проходящая через центры описанной и вписанной окружности, параллельна стороне BC. Докажите, что центр окружности девяти точек треугольника ABC лежит на прямой MI, где M — середина стороны BC.

Решение. Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной BC, A_1 — основание высоты, проведенной из вершины A, T — точка касания вневписанной окружности со стороной BC, D — точка вписанной окружности, диаметрально противоположная K, H — ортоцентр, E — центр окружности девяти точек (см. рис. 10–11.3).

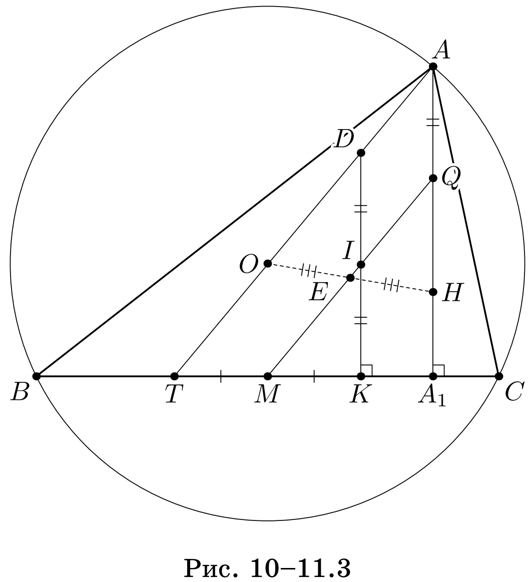

Рис. 10–11.3

Используем без доказательства следующие факты.

Факт 1. $MT = MK$.

Факт 2. Точки A, D и T лежат на одной прямой.

Факт 3. $AH = 2OM$.

Факт 4. E **— середина** OH.

Вернемся к решению.

Из первых двух фактов следует, что MI параллельна AT как средняя линия треугольника DKT. Пусть MI пересекает высоту AA_1 в точке Q. Тогда $DAQI$ — параллелограмм и $AQ = DI = r$, где r — радиус вписанной окружности. Кроме того, так как OI параллельна BC, то $OM = IK = r$. Учитывая факт 3, получим, что $AH = 2OM = 2r$, то есть $QH = r$. Следовательно, $OQHM$ — параллелограмм и MQ проходит через E — середину OH (факт 4), что и требовалось.

Комментарии.

1. *Факт* 2 *можно доказать, использовав гомотетию с центром в точке* A, *переводящую вписанную окружность во вневписанную.*

2. *Факт* 1 *легко получить из равенства* $BT = CK = p - AB$ (p — *полупериметр*).

3. *Факты* 3 *и* 4 *следуют из гомотетии треугольника* ABC *и его срединного треугольника.*

4. *Свойствам треугольников, в которых* $OI \parallel BC$, *был посвящен проект ЛКТГ*–2015.

4. (*Ю. Блинков*) Дан равногранный тетрадр $PABC$ (грани — равные треугольники). Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами BC, AC и AB соответственно; A_1, B_1 и C_1 — точки касания вневписанных окружностей треугольников PCA, PAB и PBC с продолжениями сторон PA, PB и PC соответственно (за точки A, B, C). Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Поскольку не существует плоскости, проходящей через все три указанные прямые, то достаточно будет доказать, что пересекаются любые две из этих прямых. Действительно, если три прямые попарно пересекаются в трех различных точках, то они лежат в одной плоскости.

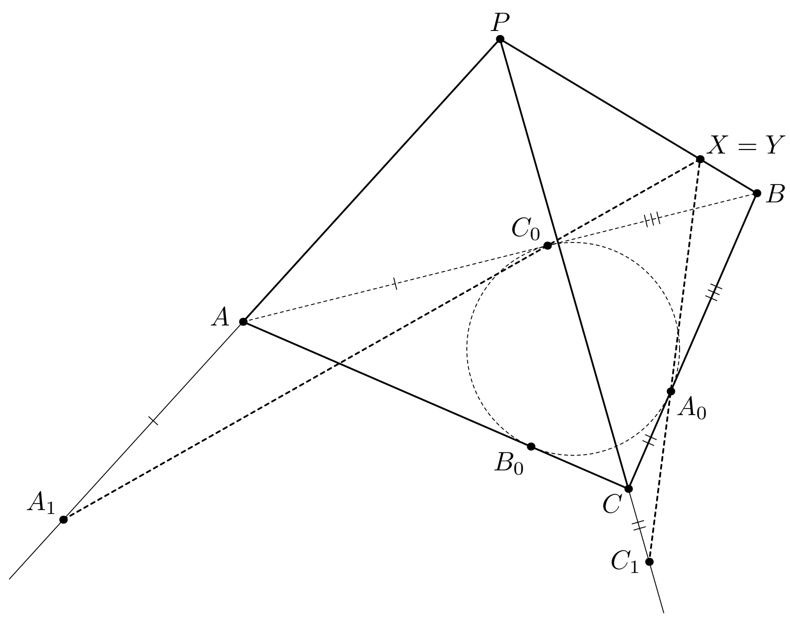

Рис. 10–11.4

Докажем, например, что прямые A_0A_1 и C_0C_1 пересекаются (для других пар прямых — аналогично). Для этого достаточно доказать пересечение прямых A_0C_1 и C_0A_1, то есть, например, что они пересекают ребро PB в одной и той же точке (см. рис. 10–11.4). Рассмотрим треугольники PAB и PCB и прямые A_0C_1 и C_0A_1 пересекающие их общую сторону PB в точках X и Y соответственно. Из условия следует, что $BC_0 = BA_0$. Кроме того, $PA_1 = PC_1 = p$ как полупериметры равных треугольников. И, наконец, равны противолежащие ребра тетраэдра, то есть $AA_1 = p - PA = p - BC = AC_0$. Аналогично, $CC_1 = p - PC = p - AB = CA_0$. Тогда, записав теорему Менелая для указанных треугольников и прямых, получим:

$$1)\ \frac{PA_1}{AA_1} \cdot \frac{AC_0}{BC_0} \cdot \frac{BX}{XP} = 1; \qquad 2)\ \frac{PC_1}{CC_1} \cdot \frac{CA_0}{BA_0} \cdot \frac{BY}{YP} = 1.$$

Учитывая доказанные ранее равенства отрезков получим, что $\dfrac{BX}{XP} = \dfrac{BY}{YP}$, то есть X и Y совпадают, что и требовалось.

Комментарии.

Утверждение задачи аналогично свойству каркасного тетраэдра (*тетраэдр, у которого равны суммы длин противолежащих ребер*). *В таком тетраэдре окружности,* *вписанные в грани, касаются; существует сфера, касающаяся всех ребер; прямые, соединяющие точки касания сферы с противоположными ребрами, пересекаются в одной точке.*

В этой же задаче мы фактически доказали касание вневписанных окружностей граней со вписанной и между собой, а также существование сфер, касающихся трех ребер тетраэдра и трех продолжений.

5. (*И. Кухарчук*) В остроугольном треугольнике ABC с ортоцентром H прямая AH пересекает BC в точке A_1. Пусть Γ — окружность с центром на стороне AB, касающаяся AA_1 в точке H. Докажите, что Γ касается описанной окружности треугольника AMA_1, где M — середина AC.

Решение. *Первый способ.* Пусть прямая MH пересекает окружность ω, описанную около треугольника AMA_1, в точке P (см. рис. 10-11.5a). Докажем, что окружности Γ (с центром O_2) и ω (с центром O) касаются в точке P. Рассмотрим окружность Γ_1 с центром O_1, которая касается AA_1 в точке H и касается окружности ω в точке Q. Тогда по лемме Архимеда прямая QH проходит через середину дуги AA_1 окружности ω, то есть через M. Следовательно, точка Q совпадает с точкой P и достаточно доказать совпадение окружностей Γ и Γ_1, то есть совпадение точек O_2 и O_1 или равенство отрезков O_2H и O_1H.

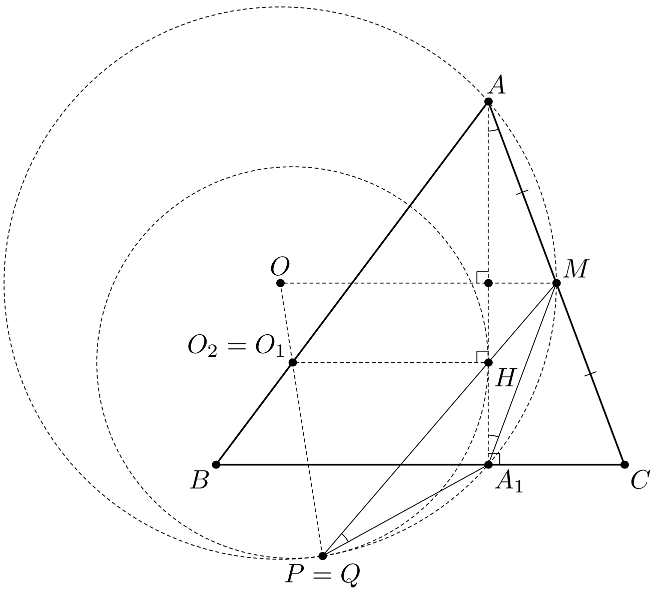

Рис. 10–11.5a

Поскольку O, O_1 и P лежат на одной прямой, а OM и O_1H параллельны как два перпендикуляра к AA_1, то треугольники O_1PH и OPM подобны (то же самое можно получить из гомотетии окружностей), откуда $\dfrac{O_1H}{OM} = \dfrac{PH}{PM}$.

По следствию из теоремы синусов $OM = \dfrac{AM}{2\sin\angle AA_1M} = \dfrac{AC}{4\cos\angle C}$, то есть $O_1H = \dfrac{AC}{4\cos\angle C}\cdot\dfrac{PH}{PM}$. С другой стороны, из треугольника AO_2H получим: $O_2H = AH\cdot\operatorname{ctg}\angle B$.

Используя произведение отрезков хорд, получим: $AH\cdot HA_1 = PH\cdot MH$. Кроме того, $\operatorname{ctg}\angle B = \dfrac{HA_1}{A_1C} = \dfrac{HA_1}{AC\cos\angle C}$.

Тогда нам достаточно доказать, что $MH\cdot PM = 0{,}25AC^2$. Это, в свою очередь, следует из подобия треугольников MPA_1 и MA_1H ($\angle MA_1H = \angle MAA_1 = \angle MPA_1$). Итак, $O_1H = O_2H$, что и требовалось.

Комментарии.

Из решения следует, в частности, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Также можно показать, что она лежит и на окружности с диаметром BH.

Про другие свойства этой точки можно прочитать, например,

https://geometry.ru/articles/p-point.pdf.

Второй способ. Рассмотрим композицию инверсии и симметрии с центром H, меняющую местами A и A_1, то есть такую, что $AH \cdot HA_1 = R^2$, где R — радиус окружности инверсии (см. рис. 10–11.5б). Поскольку произведение отрезков хорд окружности, описанной около треугольника AMA_1 и проходящих через точку H, постоянно, то эта композиция меняет местами концы любых хорд, проходящих через H, то есть оставляет на месте окружность, описанную около треугольника AMA_1.

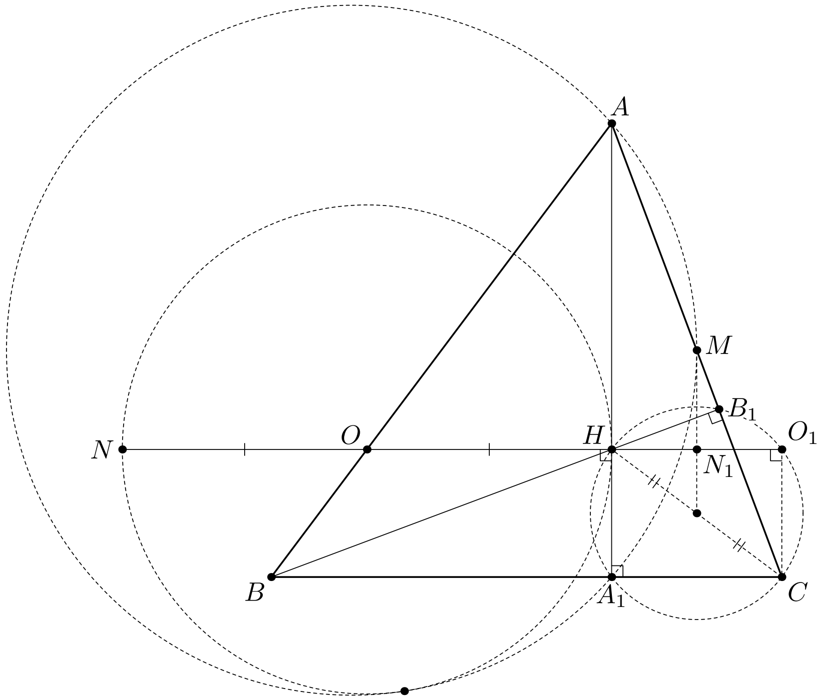

Рис. 10–11.5а

Кроме того, прямая AB, не проходящая через центр инверсии должна перейти в окружность, проходящую через центр инверсии H. Поскольку A и B переходят в основания высот A_1 и B_1 соответственно, то эта окружность проходит еще через точку C, иначе говоря, построена на CH, как на диаметре.

Следовательно, центр O окружности, касающейся AH, переходит в проекцию O_1 точки C на прямую OH.

Тогда окружность Γ, проходящая через центр инверсии H и касающаяся AH, должна перейти в прямую, не проходящую через центр инверсии и параллельную AH. Кроме того, если точка N диаметрально противоположна точке H, а N_1 — ее образ, лежащий, разумеется, на прямой HO, то $HN \cdot HN_1 = HO \cdot HO_1$, то есть N_1 — середина HO_1, то есть окружность Γ переходит в серединный перпендикуляр к отрезку O_1H. Осталось заметить, что указанный серединный перпендикуляр проходит через середину CH (центр окружности, на которой лежит точка O_1) и параллелен AA_1, то есть проходит через точку M и касается окружности, описанной около треугольника AMA_1, в этой точке. Следовательно, касаются и их прообразы при указанной композиции, что и требовалось.

Комментарий.
Про свойства инверсии можно прочитать, например, И. Жижилкин, «Инверсия».

6. (*П. Бибиков, А. Заславский*) Точки C_1 и C_2 лежат на стороне AB треугольника ABC, причем точка C_1 принадлежит отрезку AC_2 и $\angle ACC_1 = \angle BCC_2$. На отрезках CC_1 и CC_2 выбраны точки A' и B' так, что $\angle CAA' = \angle CBB' = \angle C_1CC_2$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $CA'B'$, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

Решение. Пусть окружности, описанные около треугольников $AA'C$ и $BB'C$ вторично пересекаются в точке Q (см. рис. 10–11.6а). Пусть $\angle CAA' = \angle CBB' = \angle C_1CC_2 = \alpha$, $\angle A'CQ = x$. Тогда $\angle A'AQ = \angle A'CQ = x$, а $\angle CA'Q = \angle CAQ = \alpha - x = \angle B'CQ$. Аналогично, $\angle CB'Q = \angle A'CQ = x$.

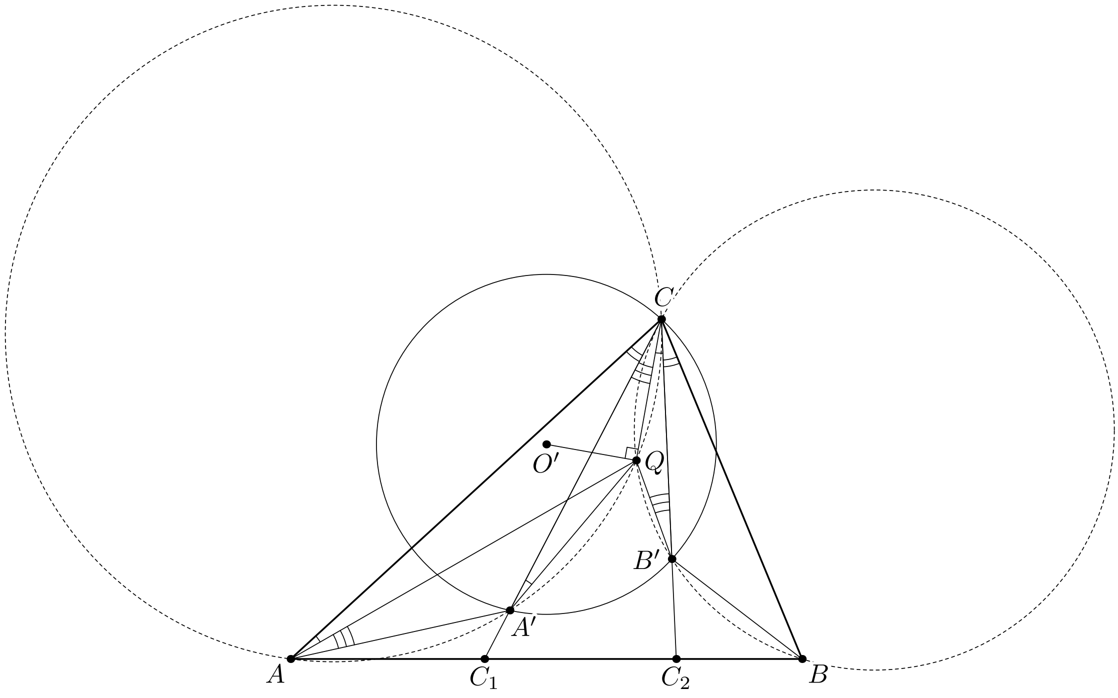

Рис. 10–11.6а

Далее используем следующий факт.

Пусть точка Q, лежащая внутри треугольника ABC, такова, что $\angle QCA = \angle QBC$, $\angle QCB = \angle QAC$. Тогда точка Q является проекцией центра описанной окружности O на симедиану, проведенную из вершины C.

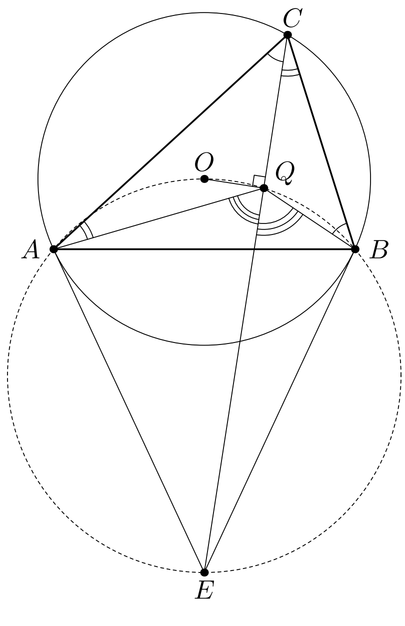

Рис. 10–11.6б

Докажем это.

Заметим, что $\angle AQB = \angle QCA + \angle QAC + \angle QCB + \angle QBC = 2\angle ACB$ (см. рис. 10–11.6б), то есть точка Q лежит на описанной окружности треугольника AOB. Кроме того, эта окружность проходит через точку E пересечения касательных к описанной окружности, проведенных в точках A и B, причем E — середина дуги AB. Поскольку прямая CQ содержит биссектрису угла AQB, то точки C, Q и E лежат на одной прямой.

Учитывая, что OE — диаметр окружности, описанной около треугольника AOB, а также основную задачу о симедиане, получим требуемое.

Вернемся к решению. В данном случае, если рассмотреть центр O' окружности, описанной около треугольника $CA'B'$, то он лежит на перпендикуляре к CQ, проведенном через Q. Теперь нам понадобится еще один факт.

Даны две окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Два велосипедиста едут по этим окружностям (каждый — по своей) с постоянными угловыми скоростями в разных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Они одновременно выезжают из точки Y, делают один оборот и возвращаются в точку Y. Тогда на плоскости существует неподвижная точка V, которая в каждый момент времени равноудалена от велосипедистов, причем $\angle YXV = 90^\circ$. Точка V называется точкой двух велосипедистов.

Докажем это. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей. Рассмотрим точки A и B, лежащие на этих окружностях, такие, что дуги AY и BY имеют одинаковую угловую меру (см. рис. 10-11.6в).

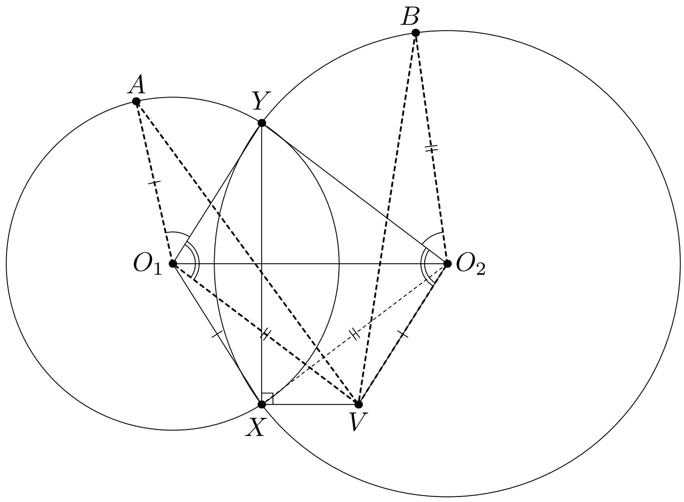

Рис. 10–11.6в

Рассмотрим также точку V, такую, что O_1XVO_2 — равнобокая трапеция. Тогда, разумеется, $\angle YXV = 90^\circ$. Докажем, что эта точка равноудалена от A и B. Рассмотрим треугольники O_1VA и O_2BV. Заметим, что $VO_2 = XO_1 = AO_1$, а $VO_1 = XO_2 = BO_2$ как радиусы первой и второй окружности соответственно. Кроме того, O_1VO_2Y — параллелограмм. Следовательно, $\angle AO_1V = \angle AO_1Y + \angle YO_1V = \angle BO_2Y + \angle YO_2V = \angle BO_2V$, то есть треугольники O_1VA и O_2BV равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AV = BV$, что и требовалось.

Вернемся к решению. В данном случае, O' равноудалена от A' и B' и $\angle CQO' = 90^\circ$, то есть O' точка двух велосипедистов, стартовавших из C и едущих по окружностям, описанным около треугольников $AA'C$ и $BB'C$ в разных направлениях. Поскольку $\angle CA'A = \angle CB'B$, то пара точек A и B — также одно из положений указанных велосипедистов. Следовательно, $O'A = O'B$, что и требовалось.

Комментарии.

Про симедиану подробнее можно прочитать, например, в https://www.geometry.ru/articles/symmedian_blinkov.pdf.

Про точку двух велосипедистов подробнее можно прочитать, например, в https://www.geometry.ru/articles/protasovbycicle.pdf.

Проекцию центра описанной окружности на симедиану иногда называют точкой Болтая.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников.