XXI Устная городская математическая олимпиада для 6-7 классов
07.04.2024
Решения задач
6 класс

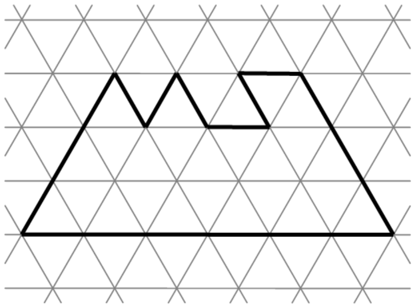
1. **Делёж рыбы**. Три матроса и юнга поймали несколько рыб, все массы которых различны. Юнга сумел разделить рыб на четыре равные по массе кучки. Матросы с ним не согласились, отдали юнге самую маленькую рыбку, а остальных разделили между собой на три равные по массе кучки. Каково наименьшее количество пойманных рыб?

А. Шаповалов

Ответ: 7 рыб.

Решение. *Оценка*. При дележе на четверых не могло оказаться двоих, кому досталось по одной рыбе, поскольку массы всех рыб различны. Следовательно, было поймано не меньше чем 1 + 2 + 2 + 2 = 7 рыб.

Пример. Пусть пойманные рыбы весят 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 кг. Тогда первый раз юнга мог разделить их на четыре равные по массе кучки так: 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7. А после того как матросы отдали ему килограммовую рыбу, оставшихся они могли поделить на троих так: 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5.



2. **Разрезание фигуры**. Можно ли разрезать фигуру, изображённую на рисунке, на две равные части (*то есть на части, совпадающие по форме и по размерам*)?

Т. Голенищева-Кутузова

Ответ: можно.

Решение. См. рис. 1.

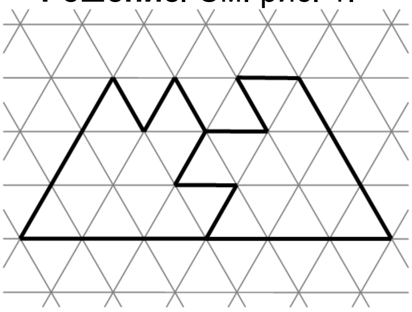


Рис. 1

3. **Цветные шарики**. В ряд положили 22 белых, 23 синих и 24 красных шарика. Может ли у каждого шарика быть ровно один сосед отличного от него цвета?

А. Пешнин

Ответ: не может.

Решение. Если у каждого шарика ровно один сосед отличного от него цвета, то у крайних шариков соседи отличаются от них по цвету. В свою очередь, у каждого из этих соседей с другой стороны лежит шарик одного с ним цвета. Продолжая рассуждение, получим, что все шарики, кроме крайних, разбиваются на пары соседних одноцветных. Тогда всего шариков должно быть чётное количество, однако их 22 + 23 + 24 = 69. Противоречие.

4. **Посчитай её**. Саша нашёл одно из решений ребуса ПО + СЧ = ИТ + АЙ = ЕЁ. Чему может быть равно ЕЁ в его решении?

А. Шаповалов, А. Заславский

Ответ: 90.

Решение. Заметим, что в ребусе используется десять различных букв, поэтому они заменяют все десять цифр. В частности, одна из них соответствует нулю. На ноль числа не начинаются, а если бы на ноль заканчивалось одно из слагаемых в какой-то сумме, то

ЕЁ заканчивалось бы на ту же цифру, что и другое слагаемое в этой сумме. Остаётся единственная возможность: Ё = 0.

Тогда О + Ч = Т + Й = 10 и П + С + 1 = И + А + 1 = Е. Так как сумма всех десяти цифр равна 45, то 45 = (О + Ч) + (Т + Й) + (П + С) + (И + А) + Е + Ё = 10 + 10 + (Е – 1) + (Е – 1) + Е + 0 = 18 + 3·Е, откуда Е = 9. Таким образом, ЕЁ в любом решении ребуса может быть равно только 90.

5. **Оклейка куба**. Каждую грань куба размером 6×6×6 разбили на 36 единичных клеток и оклеили его поверхность в один слой прямоугольными полосками, каждая из которых покрывает шесть клеток. Могло ли оказаться, что через каждое ребро куба перегнули хотя бы одну полоску?

Т. Корчёмкина

Ответ: не могло.

Решение. Рассмотрим произвольную вершину куба и три клетки, примыкающие к ней. Заметим, что даже если какие-то две из них накрыты одной полоской, то третья клетка накрыта другой полоской. Таким образом, какая-то полоска накрывает ровно одну из угловых клеток. Эта полоска расположена вдоль ребра куба, и через это ребро не могли перегнуть никакую полоску.

6. **Честные сотрудники**. В компании «Рога и копыта» 2024 сотрудника. Некоторые из них честные и всегда говорят правду, а остальные нечестные и всегда врут, но всё же хотя бы один честный точно есть. Сотрудники знают, кто есть кто, а вот директор компании этого не знает. Он планирует проводить совещания, на которые будет приглашать кого захочет и задавать каждому вопрос, сколько нечестных сотрудников среди собравшихся. Какое наименьшее количество совещаний придётся провести, чтобы заведомо выяснить, кто из сотрудников честный, а кто нет?

Е. Барабанов, переформулировка задачи из журнала «Квант» 2002 г.

Ответ: два совещания.

Решение. *Оценка*. Пусть на первое совещание директор пригласит m честных сотрудников и n нечестных, причём $m \neq n$. Тогда m человек скажут, что на совещании присутствует n нечестных, а остальные n могут сказать, что нечестных m. Но такие же ответы могут быть получены и в случае, когда среди присутствующих n честных и m нечестных. Поэтому одного совещания недостаточно.

Пример. На первое совещание директор может пригласить всех сотрудников. Получив ответы, он разобьёт их на группы, объединяя в каждую группу сотрудников, давших один и тот же ответ. Пусть количество групп равно k. Все честные сотрудники дадут правильные ответы, поэтому они окажутся в одной группе, а все нечестные – в остальных группах. Если $k = 1$, то все сотрудники честные. Если же $k > 1$, то на следующее совещание директор может пригласить ровно по одному сотруднику из каждой группы. Среди приглашённых k сотрудников будет ровно один честный, который даст ответ «k – 1». Тогда директор поймёт, что этот сотрудник и все из его группы честные, а все остальные – нечестные.

7. Задача для Васи. Петя записал на доске четыре различных двузначных числа. Докажите, что Вася сможет взять некоторые из них и, используя знаки четырёх арифметических действий и скобки, составить выражение, значение которого будет больше 1, но меньше 2.

К. Кноп

Решение. Рассмотрим промежутки: [10, 19], [20, 39], [40, 59], [60, 99]. Если на каком-то из них находится хотя бы два числа, записанных Петей, то результат деления большего на меньшее будет больше 1, но меньше 2. Если же это не так, то на каждом промежутке ровно по одному числу. Тогда сумма второго и третьего чисел лежит на четвёртом промежутке. Если она равна четвёртому числу, то отношение четвёртого к третьему меньше 2. Если же она не равна ему, то мы получили два различных числа на одном промежутке и можем поделить большее из них на меньшее.

8. Правильная раскраска квадратов. Расположите на плоскости 11 непересекающихся равных квадратов так, чтобы для их правильной раскраски трёх цветов было недостаточно. Раскраска называется правильной, если каждые два квадрата, имеющие общий отрезок границы, раскрашены в разные цвета.

Фольклор

Ответ: см. рис. 2.

Решение. Предположим, что в расположении, показанном на рисунке, для правильной раскраски достаточно трёх цветов. Пронумеруем цвета числами от 1 до 3, и пусть два квадрата в «центральной строке» покрашены в первый и второй цвета. Квадраты сверху и снизу от них раскрашиваются однозначно. Теперь посмотрим на три квадрата в столбце справа от уже раскрашенных: в них должны чередоваться второй и третий цвета. Но тогда оба квадрата справа от них должны быть раскрашены в первый цвет. Противоречие.

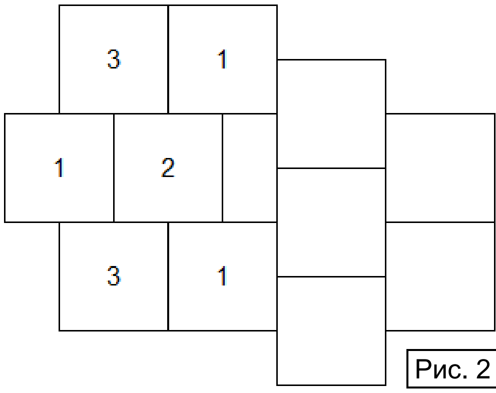


Рис. 2

9. Придворный мудрец. Король решил устроить испытание для своего придворного мудреца. Перед мудрецом положили девять карточек с номерами от 1 до 9 (мудрец видит номера) и сообщили, что на другой стороне карточек также записаны числа от 1 до 9, причём все записанные числа, кроме двух, совпадают с номером карточки, а два перепутаны. За один вопрос мудрец может указать на одну или несколько карточек и узнать сумму записанных там скрытых от него чисел. Может ли он гарантированно определить перепутанные карточки за три вопроса?

М. Евдокимов, А. Грибалко

Ответ: может.

Решение. Будем говорить, что проверка даёт равенство, если сумма скрытых чисел на карточках равна сумме их номеров, и неравенство в противном случае. Первый вопрос мудрец задаёт про карточки 1, 2, 3, 4. Возможны два исхода.

1) Если неравенство, то на обратной стороне ровно одной из карточек 1, 2, 3, 4 записано неправильное число. Тогда мудрец спрашивает про карточки 1, 2 и узнаёт, в какой паре, (1, 2) или (3, 4), эта карточка, а потом спрашивает про любую одну карточку из этой пары. Так он узнает одну из перепутанных карточек, а какая вторая – поймёт по разности между названной суммой и суммой номеров карточек из первой проверки.

2) Если равенство, то перепутанные карточки находятся либо в наборе (1, 2, 3, 4), либо в наборе (5, 6, 7, 8, 9). Тогда мудрец спрашивает про карточки 1, 4, 5, 7, 9. Сумма номеров этих карточек равна 26, рассмотрим оба возможных исхода.

2.1) Если неравенство, то посмотрим на разность между результатом и 26. Если она равна 1, то перепутанными могут быть пары (1, 2), (5, 6) или (7, 8), если она равна 2, то перепутаны (1, 3), если она равна 3, то перепутаны (5, 8), если –3, то (6, 9), если –2, то (2, 4), если –1, то (3, 4), (6, 7) или (8, 9). Несколько вариантов есть только в двух случаях, когда разность равна 1 или –1. В каждом из них три подозрительных пары, для третьего вопроса мудрец выбирает две карточки, номера которых равны меньшему числу из одной пары и большему числу из другой. Если сумма окажется на 1 больше, чем сумма номеров выбранных карточек, то перепутана первая пара, если на 1 меньше, то вторая, а если равна, то третья.

2.2) Если равенство, то перепутанная пара находится в одном из наборов (1, 4), (2, 3), (5, 7, 9) или (6, 8). Мудрец спрашивает про карточки 1, 2, 6, 9 и смотрит на разность между результатом и 18. Если эта разность равна 0, то искомая пара (5, 7), если 1, то (2, 3), если 2, то (6, 8), если 3, то (1, 4), если –4, то (5, 9), если –2, то (7, 9).