XXI Устная городская математическая олимпиада для 6-7 классов
07.04.2024
Решения задач
7 класс

1. Странное число. Существует ли такое натуральное число, у которого сумма цифр в десятичной записи равна 100, а у удвоенного числа – 110?

Олимпиада Чили для юниоров, 2012 г.

Ответ: существует.

Решение. Например, 1919...19 (10 единиц и 10 девяток). Действительно, сумма его цифр равна 100, а удвоенное число – это 3838...38 (10 троек и 10 восьмерок), у которого сумма цифр равна 110.

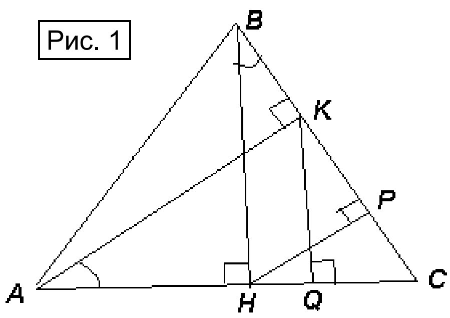
Существует и много других примеров. Все примеры строятся из следующего соображения: при умножении числа на 2 «в столбик» должно быть ровно 10 переходов через десяток (то есть в числе должно быть 10 цифр, которые не меньше 5), так как каждый переход уменьшает сумму цифр результата на 9.

2. Расстояния и высоты. В остроугольном треугольнике ABC высота BH вдвое больше расстояния от H до BC. Докажите, что высота AK вдвое больше расстояния от K до AC.

Фольклор

Решение. Пусть основания перпендикуляров из H на BC и из K на AC – это точки P и Q соответственно (см. рис. 1). Тогда BPH – прямоугольный треугольник с катетом HP, который вдвое меньше гипотенузы BH. Значит, $\angle HBP = 30^\circ$, тогда $\angle BCA = 60^\circ$. Из прямоугольного треугольника KAC получим, что $\angle KAQ = 30^\circ$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике AKQ катет KQ вдвое меньше гипотенузы AK.

Рис. 1



Отметим, что для тупоугольного треугольника утверждение остаётся верным и рассуждения аналогичны.

3. **Цветные шарики**. В ряд положили 22 белых, 23 синих и 24 красных шарика. Может ли у каждого шарика быть ровно один сосед отличного от него цвета?

А. Пешнин

Ответ: не может.

Решение. Если у каждого шарика ровно один сосед отличного от него цвета, то у крайних шариков соседи отличаются от них по цвету. В свою очередь, у каждого из этих соседей с другой стороны лежит шарик одного с ним цвета. Продолжая рассуждение, получим, что все шарики, кроме крайних, разбиваются на пары соседних одноцветных. Тогда всего шариков должно быть чётное количество, однако их 22 + 23 + 24 = 69. Противоречие.

4. Плитка. Сторона квадратного куска стены в ванной комнате выражается целым числом сантиметров. Его хотят по максимуму выложить плиткой. Если выкладывать плитками размером 20×20 см, то останется 201 см^2. А сколько останется, если выкладывать плитками размером 30×30 см?

По мотивам олимпиады СПб, 2011 г.

Ответ: 2101 см^2.

Решение. Пусть по каждой стороне квадрата выкладывали n плиток, а оставшийся зазор имеет длину k см. Тогда площадь того, что замостили, равна $(20n)^2$ см^2, а площадь всего куска стены – $(20n + k)^2$ см^2. Значит, площадь оставшейся части $201 = (20n + k)^2 - (20n)^2 = k(40n + k)$, где первый множитель меньше второго.

Существует только два варианта представить 201 в виде произведения двух натуральных множителей: $201 = 1\cdot 201 = 3\cdot 67$. Но второй вариант не подходит, так как уравнение $40n + 3 = 67$ не имеет натуральных решений. Следовательно, $k = 1$, тогда $n = 5$. Значит, длина куска стены равна $20\cdot 5 + 1 = 101$ (см), поэтому более трёх новых плиток в один ряд не поместится. Таким образом, площадь оставшейся части будет равна $101^2 - (3\cdot 30)^2 = 11\cdot 191 = 2101$ (см^2).

5. **Оклейка куба**. Каждую грань куба размером $6\times 6\times 6$ разбили на 36 единичных клеток и оклеили его поверхность в один слой прямоугольными полосками, каждая из которых покрывает шесть клеток. Могло ли оказаться, что через каждое ребро куба перегнули хотя бы одну полоску?

Т. Корчёмкина

Ответ: не могло.

Решение. Рассмотрим произвольную вершину куба и три клетки, примыкающие к ней. Заметим, что даже если какие-то две из них накрыты одной полоской, то третья клетка накрыта другой полоской. Таким образом, какая-то полоска накрывает ровно одну из угловых клеток. Эта полоска расположена вдоль ребра куба, и через это ребро не могли перегнуть никакую полоску.

6. Турнир. 30 человек проводят шахматный турнир. Каждый должен сыграть с каждым один раз. Известно, что на данный момент нет ни одной такой тройки участников, в которой каждый бы сыграл с двумя другими. Для каждого участника подсчитали количество сыгранных им партий и получили все числа от 1 до n (не обязательно по одному разу). Найдите наибольшее значение n.

Нидерланды, отбор 2019 г., упрощение

Ответ: 20.

Решение. *Пример*. Пусть в турнире участвовали 20 мальчиков и 10 девочек. И пусть первая девочка сыграла с первыми 11 мальчиками, вторая – с первыми 12 мальчиками, и так далее, десятая – с первыми 20. Другие партии не сыграны, поэтому условие про тройки участников выполняется. При этом девочки сыграли от 11 до 20 партий, а мальчики – от 10 до 1 (по 10 партий сыграли 11 мальчиков).

Оценка. Пусть $n \geq 21$. Выберем участника, сыгравшего n партий. Тогда те, с кем он сыграл, не могли сыграть между собой (иначе образуется тройка, противоречащая условию). Значит, каждый из них сыграл не более чем $30 - n$ партий, то есть не более девяти. Следовательно, для остальных $30 - n - 1 = 29 - n$ участников нужно реализовать все варианты количества сыгранных ими партий от 10 до $n - 1$. Таких вариантов не менее чем 11, а таких участников не более чем 8. Противоречие.

7. Простой делитель. Натуральное число оканчивается на 33. Докажите, что у него есть простой делитель, больший 7.

Босния, юниорский отбор, 2019 г.

Решение. Предположим, что у данного числа нет такого делителя. Тогда у него могут быть только простые делители 3 и 7 (на 2 или на 5 оно делиться не может). Значит, это число имеет вид $3^m\cdot 7^n$, где m и n – натуральные числа или ноль.

Рассмотрим остаток при делении такого числа на 4. Из того, что оно оканчивается на 33, следует, что этот остаток равен 1, а каждый его простой делитель при делении на 4 дает остаток 3. Следовательно, количество этих простых делителей должно быть чётным, поэтому числа m и n – одинаковой чётности. Рассмотрим оба случая, записав цикл последних цифр степеней 3 и 7, начиная с нулевой степени. Для степеней 3 это – 1-3-9-7, для степеней 7 – 1-7-9-3.

1) Если m и n – чётные числа, то последняя цифра числа либо 1, либо 9, что противоречит условию.

2) Если m и n – нечётные числа, то последняя цифра числа также либо 1, либо 9, что

опять противоречит условию.

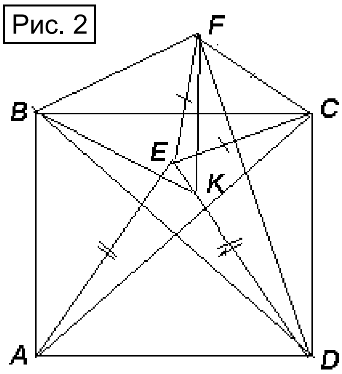
Таким образом, данное число должно иметь простой делитель, больший 7.

8. Квадрат и равносторонние треугольники. Внутри квадрата *ABCD* отмечены точки *E* и *K*, а вне квадрата – точка *F* так, что треугольники *ADE*, *EFC* и *BFK* равносторонние. Докажите, что точка *K* лежит на прямой *DE*.

М. Волчкевич

Решение. Проведём отрезки *AC* и *DF* (см. рис. 2) и рассмотрим треугольники *AEC* и *DEF* (см. рис. 2). Так как $AE = DE$, $EC = EF$ и $\angle AEC = \angle AED + \angle CED = \angle CEF + \angle CED = \angle DEF$, то эти треугольники равны, откуда $AC = DF$ и $\angle CAE = \angle FDE$.

Рис. 2



Проведём теперь диагональ *DB*, тогда $DB = AC = DF$, то есть треугольник *BDF* равнобедренный. Кроме того, $\angle BDE = \angle ADE - \angle ADB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ и $\angle FDE = \angle CAE = \angle DAE - \angle DAC = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Следовательно, *DE* – биссектриса угла при вершине *D* этого треугольника, поэтому прямая *DE* является серединным перпендикуляром к отрезку *BF*. Но из равенства $KB = KF$ следует, что точка *K* лежит на серединном перпендикуляре к *BF*, что и требовалось.

9. **Придворный мудрец**. Король решил устроить испытание для своего придворного мудреца. Перед мудрецом положили девять карточек с номерами от 1 до 9 (мудрец видит номера) и сообщили, что на другой стороне карточек также записаны числа от 1 до 9, причём все записанные числа, кроме двух, совпадают с номером карточки, а два перепутаны. За один вопрос мудрец может указать на одну или несколько карточек и узнать сумму записанных там скрытых от него чисел. Может ли он гарантированно определить перепутанные карточки за три вопроса?

М. Евдокимов, А. Грибалко

Ответ: может.

Решение. Будем говорить, что проверка даёт равенство, если сумма скрытых чисел на карточках равна сумме их номеров, и неравенство в противном случае. Первый вопрос мудрец задаёт про карточки 1, 2, 3, 4. Возможны два исхода.

1) Если неравенство, то на обратной стороне ровно одной из карточек 1, 2, 3, 4 записано неправильное число. Тогда мудрец спрашивает про карточки 1, 2 и узнаёт, в какой паре, (1, 2) или (3, 4), эта карточка, а потом спрашивает про любую одну карточку из этой пары. Так он узнает одну из перепутанных карточек, а какая вторая – поймёт по разности между названной суммой и суммой номеров карточек из первой проверки.

2) Если равенство, то перепутанные карточки находятся либо в наборе (1, 2, 3, 4), либо в наборе (5, 6, 7, 8, 9). Тогда мудрец спрашивает про карточки 1, 4, 5, 7, 9. Сумма номеров этих карточек равна 26, рассмотрим оба возможных исхода.

2.1) Если неравенство, то посмотрим на разность между результатом и 26. Если она равна 1, то перепутанными могут быть пары (1, 2), (5, 6) или (7, 8), если она равна 2, то перепутаны (1, 3), если она равна 3, то перепутаны (5, 8), если –3, то (6, 9), если –2, то (2, 4), если –1, то (3, 4), (6, 7) или (8, 9). Несколько вариантов есть только в двух случаях, когда разность равна 1 или –1. В каждом из них три подозрительных пары, для третьего вопроса мудрец выбирает две карточки, номера которых равны меньшему числу из одной пары и большему числу из другой. Если сумма окажется на 1 больше, чем сумма номеров выбранных карточек, то перепутана первая пара, если на 1 меньше, то вторая, а если равна, то третья.

2.2) Если равенство, то перепутанная пара находится в одном из наборов (1, 4), (2, 3), (5, 7, 9) или (6, 8). Мудрец спрашивает про карточки 1, 2, 6, 9 и смотрит на разность между результатом и 18. Если эта разность равна 0, то искомая пара (5, 7), если 1, то (2, 3), если 2, то (6, 8), если 3, то (1, 4), если –4, то (5, 9), если –2, то (7, 9).