Двадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцать первая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2024 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Ю. Блинков*) В равнобокой трапеции диагонали перпендикулярны. Найдите расстояние от центра окружности, описанной около трапеции, до точки пересечения ее диагоналей, если длины оснований равны a и b.

Ответ: $0{,}5|a-b|$.

Решение. Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$ с основаниями $AD=a$ и $BC=b$ ($a>b$), диагонали которой перпендикулярны и пересекаются в точке P; O — центр окружности, описанной около данной трапеции. Возможны различные способы рассуждения.

Первый способ. Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно (см. рис. 8–9.1а).

Поскольку точка O равноудалена от всех вершин трапеции, то OM и ON — серединные перпендикуляры к диагоналям трапеции, то есть $OMPN$ — прямоугольник, как четырехугольник с тремя прямыми углами. Тогда $OP=MN$ как диагонали прямоугольника. Осталось воспользоваться тем, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Комментарий. Указанный факт следует из того, что середины диагоналей лежат на средней линии трапеции.

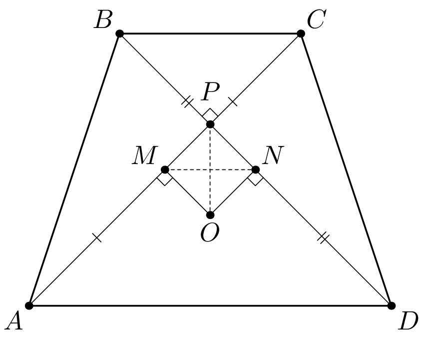

Рис. 8–9.1а

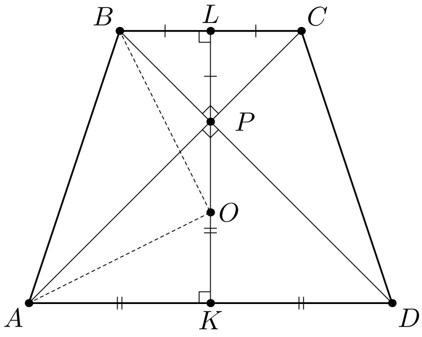

Рис. 8–9.1б

Второй способ. Пусть L и K — середины BC и AD соответственно (см. рис. 8–9.1б). Поскольку трапеция равнобокая, то $PB=PC$ и $PA=PD$, то есть точка P лежит на общем серединном перпендикуляре к основаниям. Кроме того, O также лежит на указанном перпендикуляре, так как равноудалена от вершин трапеции. Следовательно, точки L, P, O и K лежат на одной прямой.

Поскольку диагонали трапеции перпендикулярны, то $LP=LB=0{,}5b$, а $KP=KA=0{,}5a$ как медианы прямоугольных треугольников.

Пусть $OP=x$. Тогда $OL=OP+PL=0{,}5b+x$, а $OK=KP-OP=0{,}5a-x$. Кроме того, отрезки OA и OB равны радиусу окружности. Тогда из прямоугольных треугольников AOK и BOL получим: $AK^2+OK^2=BL^2+OL^2$, то есть $0{,}25a^2+(0{,}5a-x)^2=0{,}25b^2+(0{,}5b+x)^2$, откуда $x=0{,}5(a-b)$.

Комментарий 1. Для доказательства того, что точки L, P и K лежат на одной прямой можно было использовать замечательное свойство трапеции.

Комментарий 2. В процессе решения мы доказали, что $OK=0{,}5BC$ и $OL=0{,}5AD$. Это свойство произвольного вписанного четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, которое можно получить из равенства треугольников AOK и OBL по гипотенузе и острому углу, предварительно доказав, что $\angle AOD+\angle BOC=180^\circ$.

Тогда решение задачи можно свести к применению указанного свойства.

Комментарий 3. Равенство $OK=0{,}5BC$, из которого следует утверждение задачи, также можно получить, рассмотрев точку E — диаметрально противоположную точке D. Тогда $\angle EAD=\angle EBD=90^\circ$, откуда следует параллельность прямых AE и OK, а также прямых AC и BE. То есть $OK=0{,}5AE=0{,}5BC$.

Комментарий 4. Попутно доказано равенство $a^2 + b^2 = 4R^2$ (где R — радиус описанной окружности), которое также является свойством произвольного вписанного четырехугольника с перпендикулярными диагоналями.

2. (*Д. Прокопенко*) В треугольнике ABC провели биссектрису BL. Пусть точки I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABL и CBL, а точки J_1 и J_2 — центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся стороны BL. Докажите, что точки I_1, I_2, J_1 и J_2 лежат на одной окружности.

Решение. Заметим, что точка J_1 лежит на биссектрисе угла A и внешнего угла L треугольника ABL (см. рис. 8–9.2). Следовательно, точки A, I_1 и J_1 лежат на одной прямой, и точки L, I_2 и J_1 также лежат на одной прямой. Аналогично с точками C, I_2 и J_2 и точками L, I_1 и J_2.

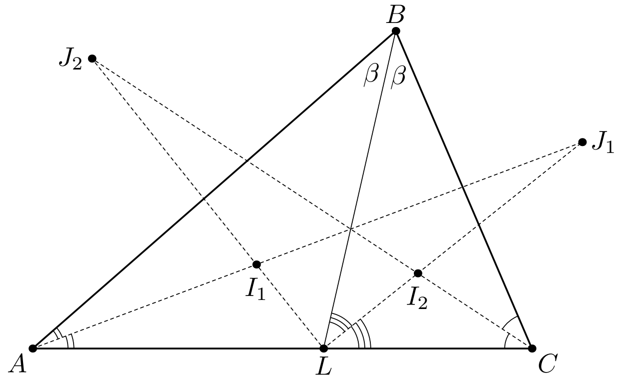

Рис. 8–9.2

Докажем, что $\angle J_1I_1J_2 = \angle J_1I_2J_2$, откуда и будет следовать утверждение задачи.

Пусть $\angle ABC = 2\beta$. Тогда $\angle AI_1L = 90^\circ + 0{,}5\beta$ как угол между биссектрисами треугольника ABL с углом β при вершине B. Аналогично, $\angle CI_2L = 90^\circ + 0{,}5\beta$. Осталось воспользоваться равенством вертикальных углов.

Комментарий. Прямые AI_1 и CI_2. пересекаются в центре вписанной окружности треугольника ABC, то есть на биссектрисе BL.

3. (*И. Русских*) Внутри квадрата $ABCD$ на стороне AB построен равносторонний треугольник ABE, а на диагонали AC — равносторонний треугольник AFC (D — внутри этого треугольника). Отрезок EF пересекает CD в точке P. Докажите, что прямые AP, BE и CF пересекаются в одной точке.

Решение. Докажем, что прямые AP и BE проходят через середину X отрезка CF (см. рис. 8–9.3).

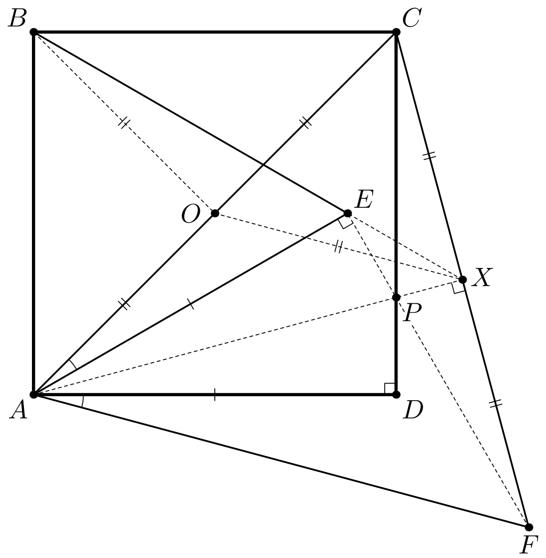

Рис. 8–9.3

Для доказательства того, что прямая AP проходит через точку X достаточно показать, что точки D и E симметричны относительно высоты равностороннего треугольника AFC, проведенной из вершины A, то есть равенство треугольников ADC и AEF.

Это можно сделать, например, так.

$\angle FAD = \angle FAC - \angle DAC = \angle EAB - \angle CAB = \angle CAE = 15^\circ$. Кроме того, $AF = AC$ и $AD = AE$, откуда и следует искомое.

Докажем, что прямая BE проходит через точку X. Возможны различные способы рассуждения.

Первый способ. Пусть O — середина AC, тогда треугольник COX — равнобедренный с углом 60°, то есть равносторонний. Следовательно, $BO = OX$, то есть треугольник BOX также равнобедренный, причем $\angle BOX = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, откуда $\angle OBX = 15^\circ$. Тогда $\angle ABX = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$, а точка X лежит на прямой BE, что и требовалось.

Второй способ. Поскольку $\angle AEF = \angle ADC = 90^\circ$, то достаточно доказать, что $\angle XEF = 30^\circ$. Заметим, что точки F, X, E и A лежат на одной окружности с диаметром AF.

Следовательно, $\angle XEF = \angle XAF = 0{,}5\angle FAC = 30^\circ$, что и требовалось.

Комментарий 1. Можно было использовать окружность с диаметром AC, на которой лежат точки X и B, и равенство вписанных углов $\angle XBA = \angle XCA$.

Комментарий 2. Также можно было доказать, что P — центр вписанной окружности треугольника FCY, а E — центр вневписанной окружности треугольника FXY, где Y — центр равностороннего треугольника AFC. Отсюда следует, что $\angle XPE = 105^\circ$, а $\angle AXE = 45^\circ$, откуда $\angle XEF = 30^\circ$.

4. (*М. Волчкевич*) Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 60°. Вписанная в треугольник окружность с центром I касается стороны AC в точке K. Прямая, проходящая через точки касания этой окружности с другими сторонами треугольника, пересекает описанную около него окружность в точках M и N. Докажите, что луч KI делит дугу MN пополам.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, S — точка пересечения прямой IK с указанной дугой (см. рис. 8–9.4а). Докажем, что радиус OS перпендикулярен хорде MN, откуда и будет следовать утверждение задачи. Возможны различные способы рассуждения.

Первый способ. Поскольку биссектриса равнобедренного треугольника является высотой, то достаточно доказать параллельность OS и BI.

Пусть W — середина дуги AC, не содержащей точку B. Тогда точка W лежит на биссектрисе угла B и на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Докажем, что $WOSI$ — ромб, откуда и будет следовать утверждение задачи.

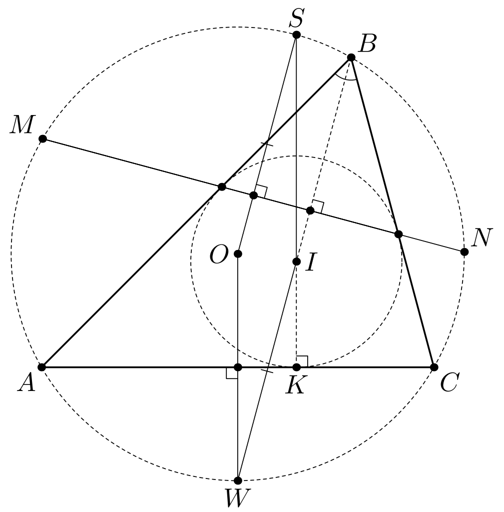

Рис. 8–9.4а

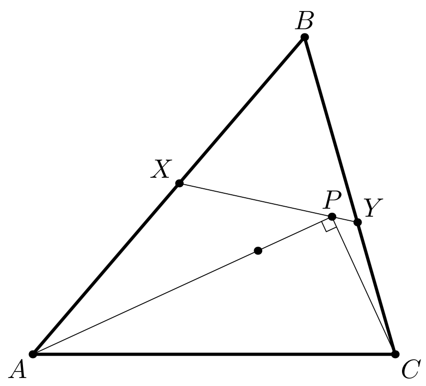

Рис. 8–9.4б

Предварительно покажем, что, если угол ABC равен 60°, то отрезок WI равен радиусу окружности. Действительно, если угол ABC равен 60°, то $\angle AOC = 120^\circ$, а $\angle AOW = 60^\circ$, то есть треугольник AOW равносторонний и $WA = WO$. Кроме того, по лемме о трезубце $WA = WC = WI$, то есть $WI = WO$. Вернемся к решению.

Рассмотрим четырехугольник $WOSI$. У него равны стороны WI, WO и OS, а стороны OW и SI параллельны как перпендикуляры к стороне BC. Такой четырехугольник является либо ромбом, либо равнобокой трапецией с основаниями OW и SI. Осталось заметить, что последний случай невозможен, так как ось симметрии этой трапеции является общим серединным перпендикуляром к основаниям, то есть прямой AC, что противоречит взаимному расположению точек S, I и K.

Второй способ. Используем без доказательства следующие факты.

Факт 1. *AA' и CC' — высоты треугольника ABC; точка O — центр описанной окружности. Тогда прямые BO и $A'C'$ перпендикулярны* (*радиус описанной окружности перпендикулярен стороне ортотреугольника*).

Факт 2. *Пусть X и Y — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC, P — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой XY. Тогда $\angle APC = 90^\circ$* (*см. рис.* 8-9.4*б*).

Вернемся к решению.

Рассмотрим точки P и L пересечения биссектрис углов A и C с прямой MN (см. рис. 8-9.4в). Тогда $\angle APC = \angle ALC = 90^\circ$, то есть I — ортоцентр треугольника AXC, где X — точка пересечения прямых AL и CP. Покажем, что точки S и X совпадают.

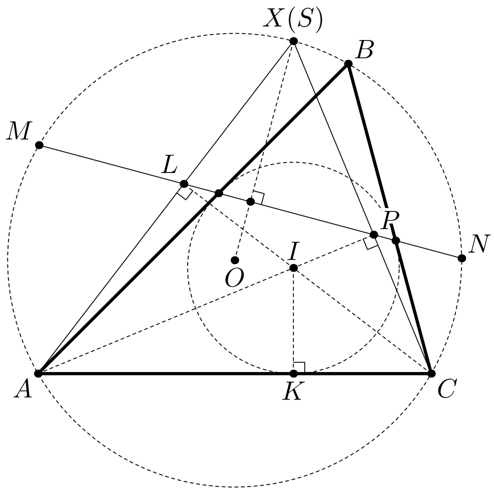

Рис. 8–9.4в

Действительно, точка X лежит на луче KI, так как высоты треугольника пересекаются в одной точке. Кроме того, $\angle AXC = 180^\circ - \angle AIC = 180^\circ - (90^\circ + 0{,}5\angle ABC) = 60^\circ = \angle ABC$, то есть точка X лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Следовательно, точки X и S совпадают, что и требовалось.

Осталось воспользоваться фактом 1 для треугольника ASC, то есть перпендикулярностью SO и PL.

Комментарий 1. Факт 1 для остроугольного треугольника можно получить, используя равенства: $\angle A'C'B = \angle ACB$ и $\angle ABO = 90^\circ - \angle ACB$.

Комментарий 2. Факт 2 является частным случаем так называемой "задачи 255" (классическая задача, которая была под этим номером в задачнике 9-11 И. Ф. Шарыгина). Доказать его можно, например, рассмотрев окружность с диаметром CI.

5. (*Ю. Блинков*) Нарисован остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, описанная около него окружность и ее центр O. Также отмечен центр I вписанной окружности. Пользуясь только линейкой (без делений) постройте симедиану (*прямую, симметричную медиане относительно соответствующей биссектрисы*) треугольника, проведя не более четырех линий.

Решение. Пусть M — середина отрезка AB, L — основание биссектрисы треугольника ABC, проведенной из вершины C, K — вторая точка пересечения прямой CM с описанной около треугольника ABC окружностью, W — середина дуги AB, не содержащей точку C, N — середина дуги AB, содержащей точку C, S — точка пересечения симедианы, проведенной из вершины C с этой окружностью (см. рис. 8-9.5а).

Тогда $\angle MCL = \angle SCL$, то есть дуги WK и WS равны, а точки K и S симметричны относительно диаметра OM, что эквивалентно симметрии лучей MC и MS относительно прямой AB или равенству углов $\angle CMB = \angle SMB$.

Докажем, что N, L и S лежат на одной прямой. Это можно сделать по-разному.

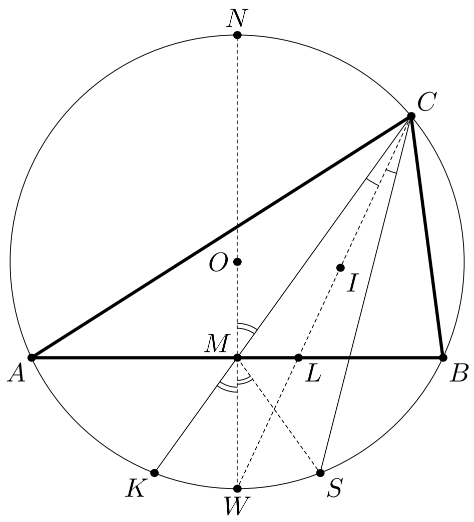

Рис. 8–9.5а

Первый способ. Заметим, что $\angle CML = \angle SML$, а $\angle MCL = \angle SCL$, то есть L — центр вписанной окружности треугольника MCS и SL — биссектриса угла MSC. Кроме того, $\angle CMN = \angle SMW$, а $\angle WCN = 90^\circ$, как опирающийся на диаметр, то есть MN и CN — биссектрисы внешних углов треугольника MCS, а N — центр его вневписанной окружности. Следовательно, SN — биссектриса угла MSC, откуда и следует искомое.

Второй способ. Пусть S_1 — точка пересечения NL с окружностью, X — точка пересечения NC и WS_1 (см. рис. 8–9.5б). Докажем, что точки S и S_1 совпадают.

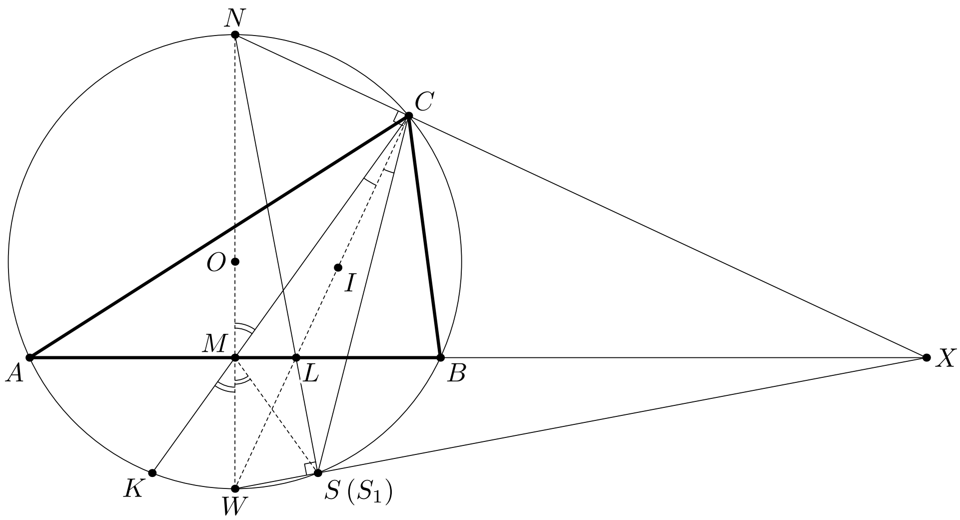

Рис. 8–9.5б

Заметим, что $\angle WCN = \angle WS_1N = 90^\circ$, как опирающиеся на диаметр. Поскольку WN и AB перпендикулярны, то точка L — ортоцентр треугольника WNX и точка X лежит на прямой AB. Осталось воспользоваться тем, что **высоты треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника**, то есть $\angle CMX = \angle S_1MX$, что и требовалось.

Отсюда вытекает способ построения:

1 — строим прямую CI и получаем точки W и L.

2 — строим прямую WO и получаем точку N.

3 — строим прямую NL и получаем точку S.

4 — строим искомую прямую CS.

Комментарий. Возможны и другие способы обоснования указанного построения. Например, в четырехугольнике $ACBS$ биссектрисы углов C и S пересекаются на стороне AB (в точке L). В таком четырехугольнике произведения противоположных сторон равны (он называется гармоническим), а диагонали являются симедианами. Про симедиану можно прочитать, например, здесь:

`https://geometry.ru/articles/symmedian$_$blinkov.pdf`.

6. (*Quan Tran*) Дан остроугольный треугольник ABC и такая точка P внутри него, что $\angle PBA = \angle PCA$. Прямые PB и PC пересекают описанные окружности треугольников PCA и PAB повторно в точках M и N соответственно. Пусть лучи MC и NB пересекаются в точке S, K — центр описанной окружности треугольника SMN. Докажите, что прямые AK и BC перпендикулярны.

Решение. Будем пользоваться следующим фактом.

Диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противолежащих сторон.

Докажем, что у четырехугольника $ABKC$ диагонали перпендикулярны, то есть докажем равенство сумм квадратов противолежащих сторон или равенство $AB^2 - AC^2 = KB^2 - KC^2$.

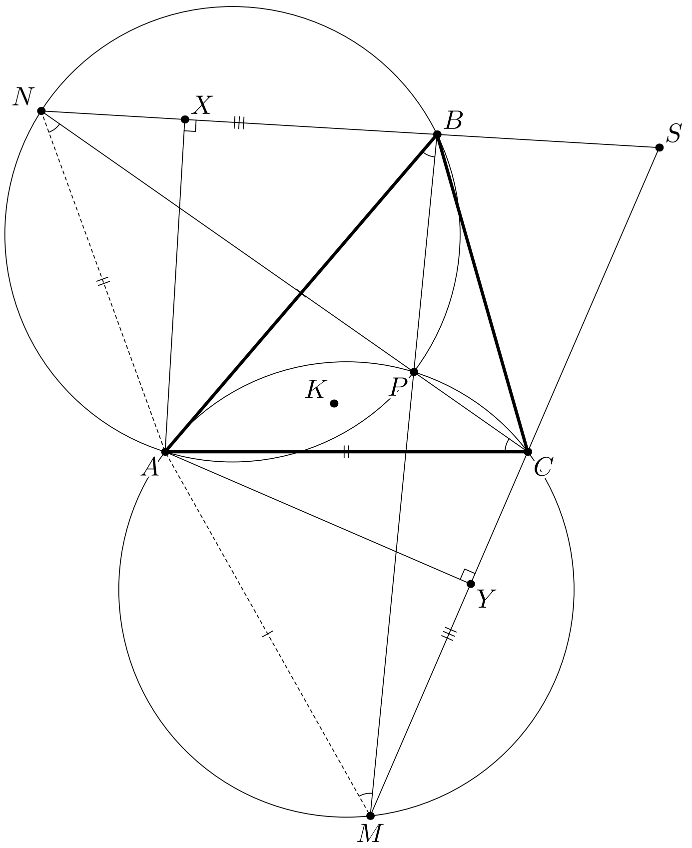

Рис. 8–9.6

Из равенства углов следует, что окружности, указанные в условии, равны (см. рис. 8–9.6). Кроме того, из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу или на равные дуги в равных окружностях, следует, что треугольники NAC и BAM — равнобедренные. И, наконец, из равенства вертикальных углов с вершиной P, хорды BN и CM в равных окружностях равны.

Следовательно, треугольники NAB и CAM равны, как и высоты AX и AY в них, проведенные к сторонам BN и CM, откуда $XN = YC$ и $SX = SY$.

Вернемся к решению. Обозначим: $NB = CM = 2a$; $SB = 2b$; $SC = 2c$. Преобразуем правую часть, используя равенство радиусов и заменив разность квадратов наклонных разностью квадратов их проекций:

$$KB^2 - KC^2 = KM^2 - KC^2 - (KM^2 - KB^2) = (a+c)^2 - (a-c)^2 - ((a+b)^2 - (a-b)^2) = 4a(c-b).$$

С другой стороны: $AB^2 - AC^2 = AB^2 - AN^2 = XB^2 - XN^2 = 2a(XB - YC) = 4a(c-b)$.

Комментарий 1. Указанный факт следует из того, что ГМТ, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна, есть прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему эти точки.

Комментарий 2. Точка A — центр поворота, переводящего одну окружность в другую, а треугольник NAB — в треугольник CAM.

Комментарий 3. Равенство отрезков BN и CM можно использовать иначе. Рассмотрим окружности, описанные около треугольников SBC и SMN. Пусть T — вторая точка их пересечения, O — центр окружности, описанной около треугольника SBC.

Тогда решение задачи можно получить из следующих утверждений:

1) T — середина дуг BC и MN указанных окружностей, то есть прямая OT перпендикулярна прямой BC.

2) $AKTO$ — параллелограмм, то есть прямые AK и OT параллельны.

Первое утверждение можно получить из равенства треугольников или как частный случай следующего факта.

Факт 1. *Дан неравнобедренный треугольник ABC. На его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC. Равенство $AC_0 = CA_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B_1 и B лежат на одной окружности.*

Подробнее про этот факт можно прочитать здесь: `https://geometry.ru/articles/sparrowvsgunmain.pdf`.

Второе утверждение можно получить, например, из того, что точка A равноудалена от N и C, от B и M и из следующего факта.

Факт 2. *Даны две окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Два велосипедиста едут по этим окружностям (каждый — по своей) с постоянными угловыми скоростями в разных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Они одновременно выезжают из точки Y, делают один оборот и возвращаются в точку Y. Тогда на плоскости существует неподвижная точка V, которая в каждый момент времени равноудалена от велосипедистов, причем $\angle YXV = 90^\circ$. Точка V называется точкой двух велосипедистов.*

В данном случае, для окружностей, описанных около треугольников SBC и SMN, точка A — точка двух велосипедистов, движущихся в разные стороны от точки T. Подробнее про точку велосипедистов можно прочитать здесь: `https://geometry.ru/articles/protasovbycicle.pdf`.

Комментарий 4. Также можно использовать, что точка A является точкой Микеля для прямых NS, MS, NC и MB, а точка T — для прямых NS, MS, BC и MN. Про точку Микеля можно прочитать, например, здесь: `https://math.ru/lib/files/pdf/planim5.pdf`.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, Д. Прокопенко.

Двадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцать первая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2024 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*А. Заславский*) Пусть P — точка внутри остроугольного треугольника ABC, а A', B', C' — проекции P на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что диаметр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, равен PC тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника ABP, проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Заметим, что PC — диаметр окружности, описанной около треугольника $A'CB'$, а точки C и C' лежат по разные стороны от прямой $A'B'$ (см. рис. 10–11.1). Кроме того, $\angle A'C'B' < \angle A'PB' = 180^\circ - \angle A'CB'$, так как P лежит внутри треугольника $A'B'C'$.

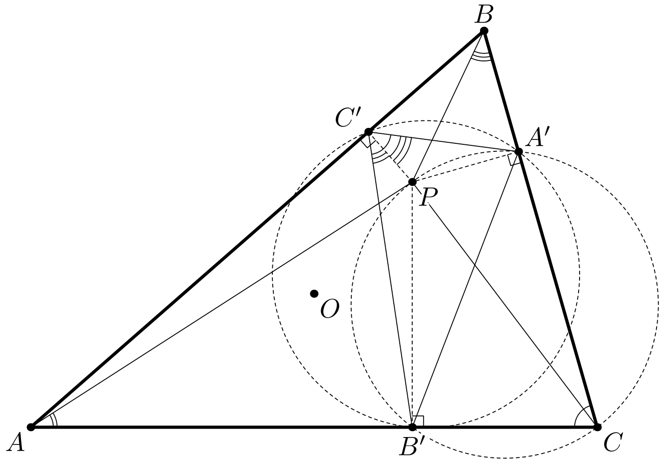

Рис. 10–11.1

И, наконец, окружности, описанные около треугольников $A'CB'$ и $A'B'C'$, имеют общую хорду и равны тогда и только тогда, когда равны синусы углов $A'CB'$ и $A'C'B'$, то есть, учитывая вышеизложенное, когда равны сами углы $A'CB'$ и $A'C'B'$.

Осталось доказать, что равенство этих углов равносильно тому, что точки A, P, O и B лежат на одной окружности.

Поскольку четырехугольники $AC'PB'$ и $BC'PA'$ — вписанные, то $\angle B'C'A' = \angle B'C'P + \angle A'C'P = \angle B'AP + \angle A'BP = \angle APB - \angle ACB$, учитывая сумму углов четырехугольника. Тогда равенство углов $A'CB'$ и $A'C'B'$ равносильно тому, что $\angle APB = 2\angle ACB = \angle AOB$, что, в свою очередь, эквивалентно расположению точек A, P, O и B на одной окружности.

2. (*А. Иванищук*) Петя нарисовал на плоскости пятиугольник $ABCDE$. После этого Вася отметил все точки S в заданном полупространстве относительно плоскости пятиугольника так, что в пирамиде $SABCDE$ ровно две боковые грани перпендикулярны плоскости основания $ABCDE$, а высота равна 1. Сколько точек могло получиться у Васи?

Ответ: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 или 10.

Решение. Если плоскости перпендикулярны плоскости основания, то их линия пересечения также перпендикулярна плоскости основания. Так как линия пересечения любых двух боковых граней содержит вершину пирамиды, то грани, перпендикулярные основанию, пересекаются по одной и той же прямой — содержащей высоту пирамиды. Кроме того, поскольку плоскости этих граней содержат стороны пятиугольника, то количество граней, перпендикулярных основанию, равно количеству прямых, содержащих стороны, проходящих через основание высоты пирамиды. С другой стороны, через любую точку пересечения двух прямых, содержащих стороны, можно провести высоту и получить ровно одну такую точку S, которая подойдет Васе, если указанных прямых, содержащих стороны пятиугольника, ровно две.

Итак, требуется найти количество различных точек пересечения прямых, содержащих стороны пятиугольника для всех видов пятиугольников.

Если никакие две стороны не параллельны, а все точки пересечения различны, то их $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Такое возможно, например, в правильном пятиугольнике (см. рис. 10-11.2а).

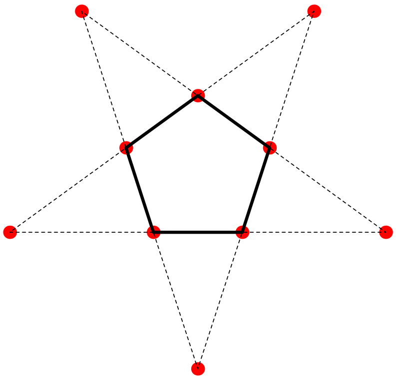

Рис. 10–11.2а

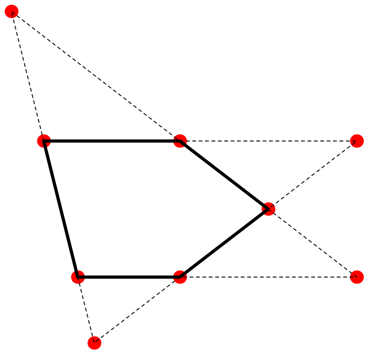

Рис. 10–11.2б

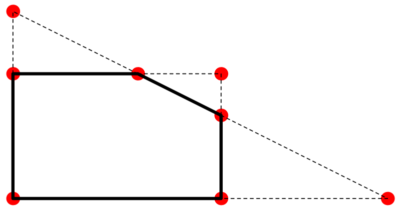

Рис. 10–11.2в

Если в выпуклом пятиугольнике есть одна пара параллельных сторон, то точек ровно на одну меньше, то есть 9 (см. рис. 10-11.2б). Аналогично, две пары параллельных сторон выпуклого пятиугольника дают 8 искомых точек (см. рис. 10-11.2в).

Возможен случай невыпуклого пятиугольника, в котором три вершины лежат на одной прямой. В этом случае, таких точек 7 (см. рис. 10-11.2г). Аналогично можно построить примеры на 6, 5, 4 и 3 точки (см. рис. 10-11.2д-ж).

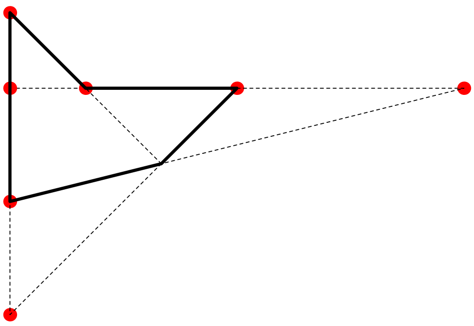

Рис. 10–11.2г

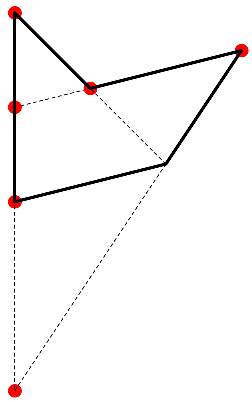

Рис. 10–11.2д

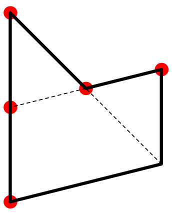

Рис. 10–11.2е

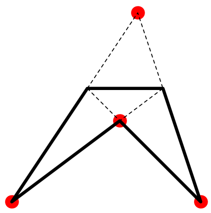

Рис. 10–11.2ж

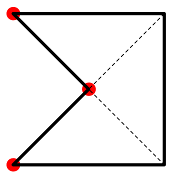

Рис. 10–11.2з

Докажем, что меньше трех точек быть не может. Действительно, вершины пятиугольника нам не подходят только в случае, когда через эту вершину проходит прямая, содержащая сторону, соединяющую не соседние с ней вершины. Так как четыре вершины лежать на одной прямой не могут, то, если, например, вершина A лежит на стороне CD, то для вершины C и стороны AE такое выполняться уже не может, как и для вершины D и стороны AB. Следовательно, вершины C и D подходят в любом случае, а из вершин B и E не подходит максимум одна, то есть хотя бы три точки, удовлетворяющие условию, есть в любом пятиугольнике.

3. (*А. Заславский*) Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC касается соответствующей вневписанной окружности ω в точке T. Точка S симметрична T относительно биссектрисы угла C, CH — высота треугольника. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CSH, касается окружности ω.

Решение. Заметим, что окружность ω симметрична относительно биссектрисы угла C, так как ее центр лежит на указанной биссектрисе (см. рис. 10–11.3).

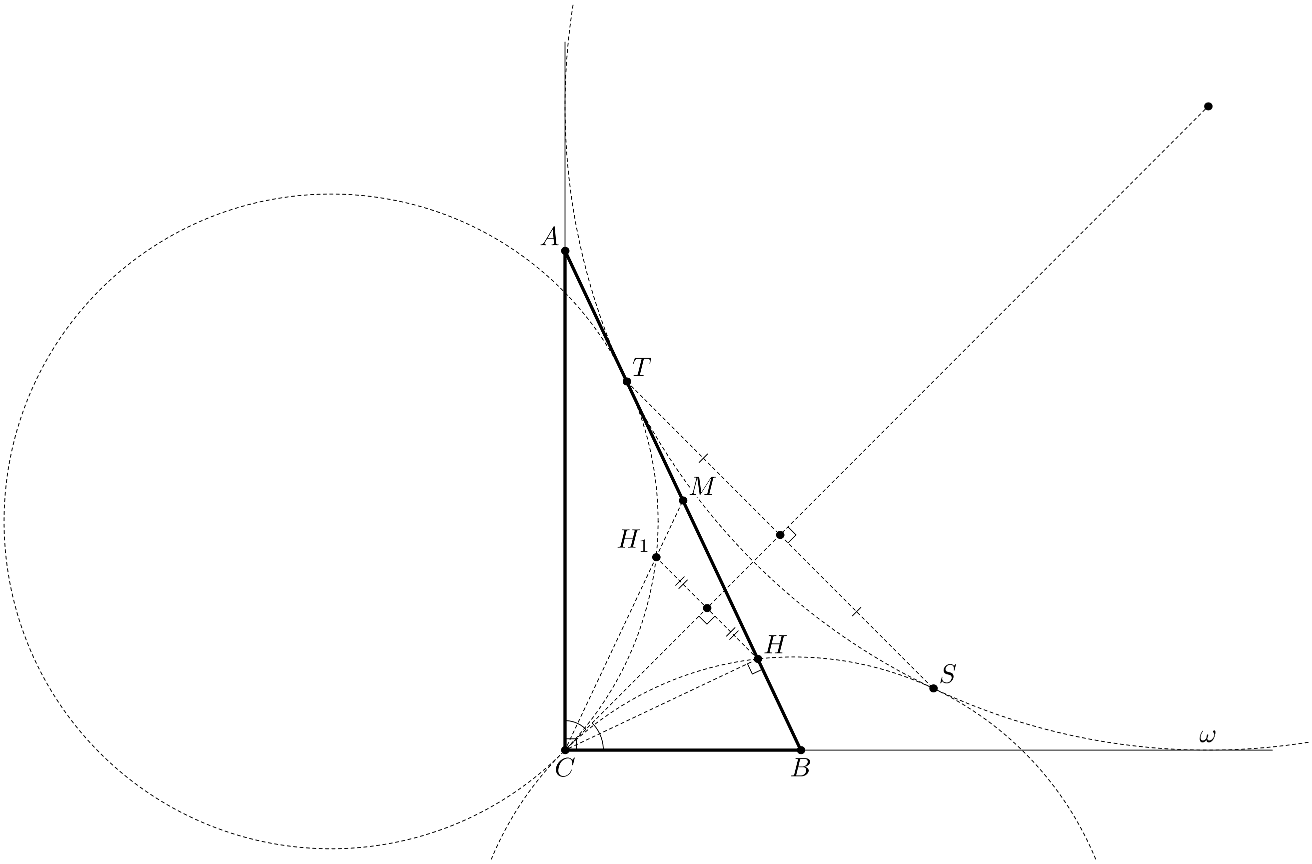

Рис. 10–11.3

Пусть H_1 — точка, симметричная точке H относительно биссектрисы угла C. Докажем, что окружность, описанная около треугольника CH_1T, касается окружности ω в точке T, откуда и будет следовать утверждение задачи.

Заметим, что прямая, симметричная высоте CH относительно биссектрисы угла C треугольника проходит через центр описанной окружности, то есть, в данном случае, через точку M — середину гипотенузы AB. Поскольку прямая MT касается окружности ω, то достаточно будет доказать касание этой прямой и окружности, описанной около треугольника CH_1T. Это, в свою очередь, будет следовать из равенства $MT^2 = MH_1 \cdot MC$.

Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ $(b > a)$, $CH = CH_1 = h$. Тогда $MC = 0{,}5c$, $MH_1 = 0{,}5c - h$, $MT = MA - AT = 0{,}5c - (0{,}5(a + c - b)) = 0{,}5(b - a)$.

Тогда достаточно доказать, что $c(c - 2h) = (b - a)^2$. Это, в свою очередь, следует из теоремы Пифагора и равенства $ab = ch$.

Комментарий 1. Равенство $ab = ch$ можно получить, например, записав двумя способами площадь прямоугольного треугольника.

Комментарий 2. Конец решения можно записать чуть иначе, доказав для прямоугольного треугольника равенство $(p - a)(p - b) = S$, где S — площадь треугольника, а p — полупериметр. По формуле Герона оно эквивалентно равенству $p(p - c) = S$. Осталось заметить, что в прямоугольном треугольнике $p - c = r$, где r — радиус вписанной окружности.

4. (*Ю. Блинков*) Нарисованы прямые, содержащие стороны неравнобедренного треугольника ABC, центр I его вписанной окружности и описанная около него окружность, центр которой не отмечен. Пользуясь только линейкой (без делений), постройте симедиану треугольника (*прямую, симметричную медиане относительно соответствующей биссектрисы*), проведя не более шести линий.

Решение. Пусть M — середина отрезка AB, W — середина дуги AB, не содержащей точку C, A_1 и B_1 — основания биссектрис треугольника ABC, проведенных из точек A и B

соответственно, X — точка пересечения прямых AB и A_1B_1, S — вторая точка пересечения прямой WX с окружностью (см. рис. 10–11.4).

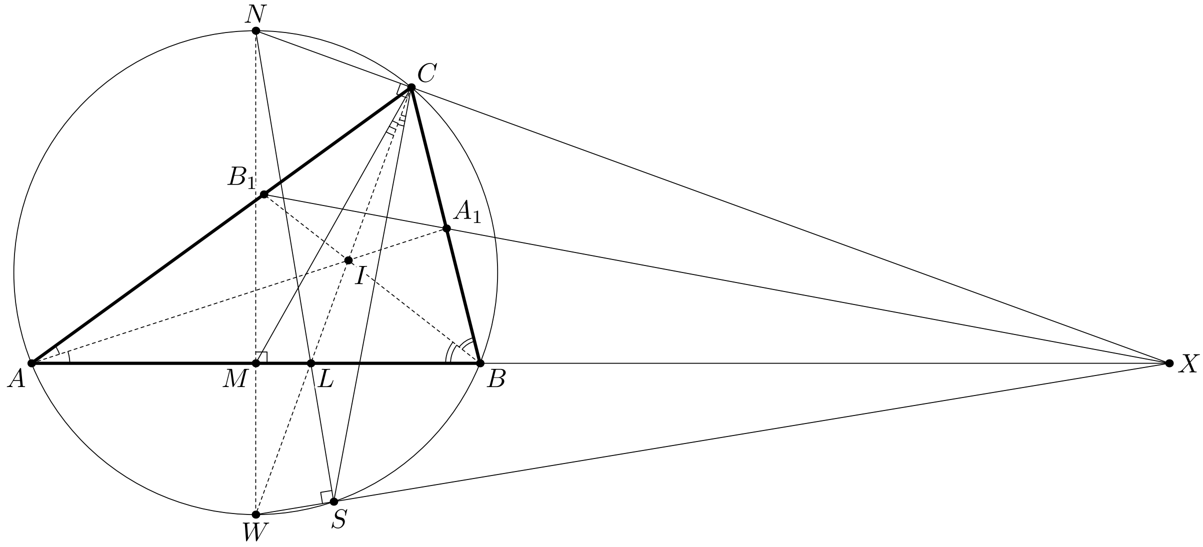

Рис. 10–11.4

Докажем, что CS — симедиана треугольника ABC.

Заметим, что CX — биссектриса внешнего угла C треугольника ABC (этот факт следует, например, из теоремы Менелая и свойства биссектрисы). Тогда прямая CX проходит через точку N — середину дуги AB, содержащую точку C и $\angle WCN = 90^\circ$, как опирающийся на диаметр, а хорда AB перпендикулярна диаметру WN.

Следовательно, L — ортоцентр треугольника WNX и точки N, L и S лежат на одной прямой.

Осталось воспользоваться тем, что **высоты треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника**, то есть $\angle MCW = \angle SCW$, что и требовалось.

Отсюда вытекает способ построения:

1 — строим прямую CI и получаем точку W (первая линия).

2, 3 — строим прямые AI и BI и получаем точки A_1 и B_1 (вторая и третья линия).

4 — строим прямую A_1B_1 и получаем точку X (четвертая линия).

5 — строим прямую WX и получаем точку S (пятая линия).

6 — строим искомую прямую CS (шестая линия).

Комментарий 1. Используя симметрию лучей MC и MS относительно прямой AB, можно было показать, что L — центр вписанной окружности треугольника MCS, а N — центр его вневписанной окружности, откуда также следует искомое.

Комментарий 2. Возможны и другие способы обоснования указанного построения. Например, в четырехугольнике $ACBS$ биссектрисы углов C и S пересекаются на стороне AB (в точке L). В таком четырехугольнике произведения противоположных сторон равны (он называется гармоническим), а диагонали являются симедианами. Про симедиану можно прочитать, например, здесь:

`https://geometry.ru/articles/symmedian_blinkov.pdf`.

Комментарий 3. Заметим, что точки A, L, B и X образуют гармоническую четверку. Тогда проекции этих четырех точек на окружность из точки W образуют гармонический четырехугольник $ACBS$. Следовательно, возможны и другие способы построения, не использующие точку I. Достаточно построить гармоническую четверку точек и спроектировать ее на данную окружность.

Комментарий 4. Можно показать, что точки C, L, X и S лежат на окружности Аполлония точек A и B.

Комментарий 5. Из решения следует, что можно построить диаметр описанной окружности, перпендикулярный AB. Построив аналогично еще один диаметр, можно построить центр окружности. Если построена окружность и ее центр, то одной линейкой можно выполнить все построения, выполнимые циркулем и линейкой (теорема Штейнера).

5. (*А. Заславский*)Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена произвольная прямая l_1, пересекающая отрезок AB и прямую BC в точках C_1 и A_1 соответственно, и произвольная прямая l_2, пересекающая отрезок BC и прямую AB в точках A_2 и C_2 соответственно. Найдите геометрическое место точек пересечения окружностей A_1BC_2 и A_2BC_1 (отличных от точки B).

Ответ: дуга окружности, описанной около треугольника ABC, содержащая точку B (*саму точку* B, *а также концы дуги следует исключить*).

Решение. Рассмотрим одно из положений прямых l_1 и l_2.

Пусть M — точка пересечения окружностей ABC и A_2BC_1, отличная от B (см. рис. 10-11.5). Исходя из расположения точек A_2 и C_1, точки M и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, а также в одной полуплоскости относительно прямой A_1C_2.

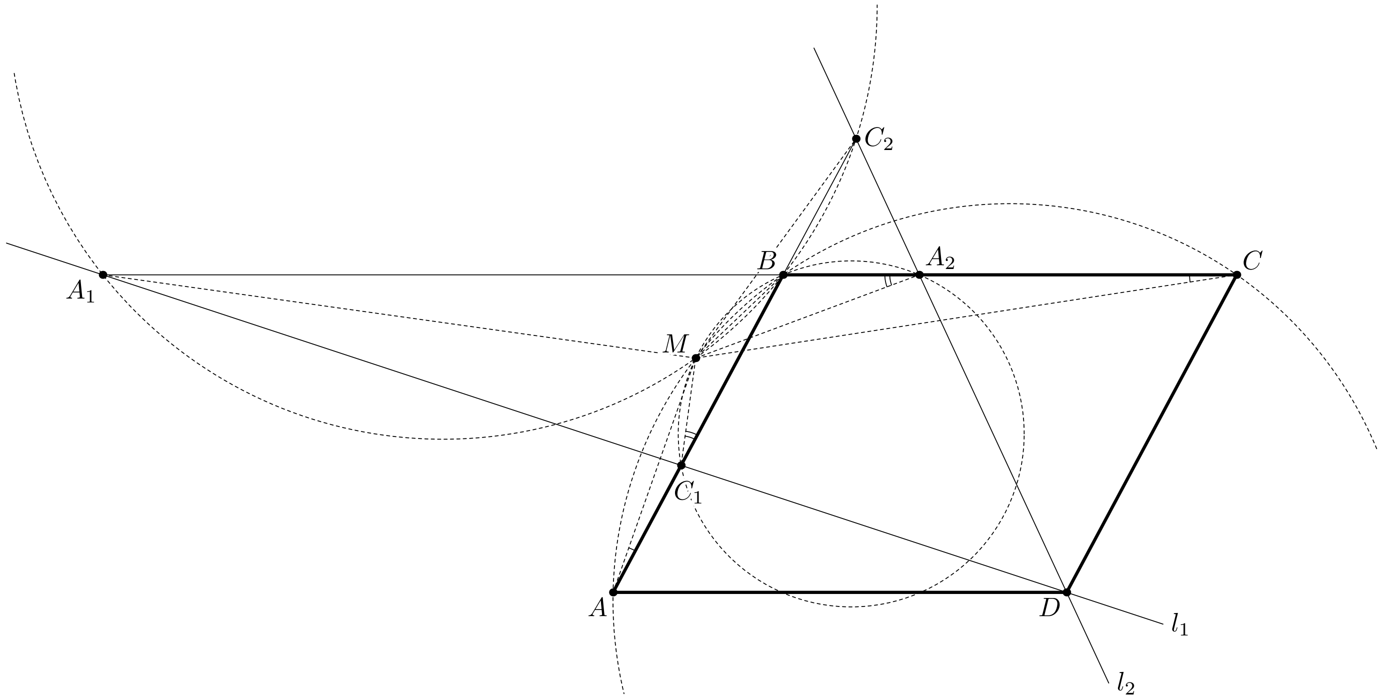

Рис. 10–11.5

Докажем, что M также лежит и на окружности, описанной около треугольника A_1BC_2.

Заметим, что $\angle MCB = \angle MAB$, а $\angle MC_1B = \angle MA_2B$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Следовательно, треугольники MCA_2 и MAC_1 подобны (*можно было также воспользоваться тем, что точка пересечения двух окружностей является центром поворотной гомотетии, переводящей одну в другую*), откуда $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{CA_2}{AC_1}$.

Тогда достаточно будет доказать подобие треугольников MCA_1 и MAC_2, то есть равенство $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{CA_1}{AC_2}$ или равенство $\dfrac{CA_2}{AC_1} = \dfrac{CA_1}{AC_2}$.

Обозначим: $AB = CD = a$, $BC = AD = b$; $CA_2 = x$; $AC_1 = y$. Используя подобие треугольников BC_1A_1 и AC_1D, получим: $CA_1 = a + \dfrac{(b-y)a}{y} = \dfrac{ab}{y}$. Аналогично, из подобия треугольников BA_2C_2 и CA_2D: $AC_2 = \dfrac{ab}{x}$. Следовательно, $\dfrac{CA_1}{AC_2} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{CA_2}{AC_1}$, что и требовалось.

Осталось заметить, что любая точка M указанной дуги удовлетворяет условию, поскольку найдется окружность, проходящая через точки B и M и пересекающая отрезки AB и BC. Точки пересечения A_2 и C_1 этой окружности с указанными отрезками и определяют положение прямых l_1 и l_2.

Комментарий. Возможно также решение, использующее инверсию с центром в точке B.

6. (*Quan Tran*) Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H, M — середина BC. Точки K и L лежат на прямой, проходящей через H и перпендикулярной AM, причем KB и LC перпендикулярны BC. Точка N лежит на прямой HM, причем прямые AN и AH симметричны относительно прямой AM. Докажите, что окружность с диаметром AN касается двух окружностей: с центром K и радиусом KB и с центром L и радиусом LC.

Решение. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC, проведенных из соответствующих вершин (см. рис. 10–11.6).

Докажем, что образ при инверсии с центром в точке A, переводящей C_1 в B, окружности Ω с диаметром AN касается образа при этой инверсии окружности ω с центром K и радиусом KB, откуда и будет следовать утверждение задачи.

Докажем сначала, что окружность с центром K и радиусом KB проходит через точку C_1.

Используем следующий факт.

Пусть точки C_1, A_1 и B_1 лежат на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC соответственно. Тогда окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, CA_1B_1 и BA_1C_1 пересекаются в одной точке.

Применив данный факт к треугольнику BAA_1 и точкам M, H и C_1, получим, что окружности, описанные около треугольников AC_1H, A_1MH и BC_1M пересекаются в точке Y. Кроме того, прямые HY и BK пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности треугольника BMC_1 и диаметрально противоположной точке M, то есть в точке K. Следовательно, $\angle KC_1M = \angle KBM = 90^\circ$. Учитывая, что $MB = MC_1 = \frac{BC}{2}$, получим равенство отрезков KB и KC_1, что и требовалось.

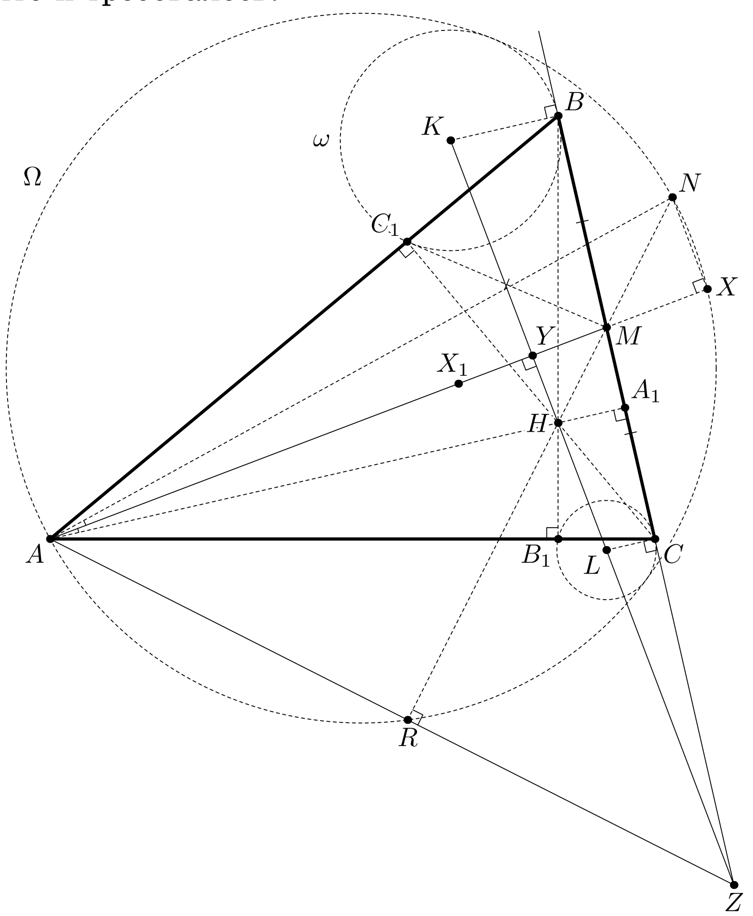

Рис. 10–11.6

Пусть прямая YH пересекает прямую BC в точке Z, а R — точка пересечения MH и AZ. Тогда H — ортоцентр треугольника AMZ и прямая MR перпендикулярна AZ, то есть точка R лежит на окружностях с диаметрами AN, AH и MZ.

Следовательно, $AR \cdot AZ = AY \cdot AM = AH \cdot AA_1 = AC_1 \cdot AB$.

Рассмотрим инверсию с центром в точке A относительно окружности с радиусом R, таким, что $AC_1 \cdot AB = R^2$. Поскольку точки C_1 и B при этой инверсии меняются местами, то окружность ω с центром K и радиусом KB переходит в себя. Окружность Ω с диаметром AN переходит в прямую, поскольку проходит через центр инверсии. Докажем, что эта прямая является касательной к окружности ω. Заметим, что точка R переходит в точку Z.

Рассмотрим образ точки X — второй точки пересечения Ω и прямой AM.

Поскольку касательные к окружности в точке Z симметричны относительно ZK, то надо доказать, что точка X_1 (симметричная M относительно ZK) является образом точки X при указанной инверсии, то есть $AX_1 \cdot AX = AY \cdot AM$.

Заметим, что AM — биссектриса угла NAH, а прямая NX параллельна YH. Применив подобие и свойство биссектрисы, получим: $\frac{AX}{AY} = \frac{AN}{AH} = \frac{MN}{MH} = \frac{MX}{MY} = \frac{AX - MX}{AY - MY} = \frac{AM}{AX_1}$, откуда и следует искомое равенство.

Для окружности с центром L и радиусом LC доказательство полностью аналогично.

Комментарий 1. Попутно доказано, что эти окружности касаются окружности с диаметром AH, а Z — один из центров их гомотетии.

Комментарий 2. Про определение и свойства инверсии можно прочитать, например, здесь: `https://math.ru/lib/files/pdf/planim5.pdf`.

Комментарий 3. Указанный в решении факт можно доказать простым счетом углов, используя свойство и признак вписанного четырехугольника.

Комментарий 4. Также решение можно было получить, используя указанную инверсию и следующие факты:

1) R — точка Микеля для прямых, содержащих стороны треугольника и прямой, проходящей через основания высот.

2) Прямая AM является радикальной осью окружностей с центром K и радиусом KB и центром L и радиусом LC.

3) Прямая AM, согласно лемме Архимеда, проходит через середину дуги окружности S, содержащей точки A и R и касающейся двух указанных.

4) Прямая, симметричная AH относительно AM, проходит через центр окружности S, то есть S совпадает с окружностью Ω.

Комментарий 5. Точка Y для треугольника ABC (как и точка R для BHC) является проекцией ортоцентра треугольника на медиану (иногда такую точку называют точкой Шалтая).

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, Д. Бродский, А. Горская, А. Заславский.