

XXII Устная городская математическая олимпиада для 6-7 классов

06.04.2025

Решения задач

6 класс

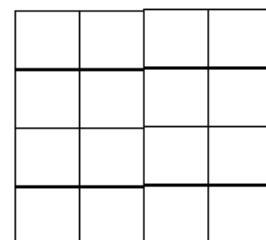
1. Кофе. В течение марта Вася выпил 12 стаканчиков кофе в разных кафе, кофейнях, магазинах и на автозаправках. Объёмы всех стаканов одинаковые. Через некоторое время он подсчитал, что в среднем выпил 84 г кофе на каждые 100 р, потраченные на кофе. По случаю дня рождения Васи владелец ближайшей кофейни налил ему три стакана кофе бесплатно. Вася тут же пересчитал среднюю массу выпитого кофе в расчете на 100 р. Сколько теперь граммов у него вышло?

И. Высоцкий

Ответ: 105 г.

Решение. Всего Вася выпил $12 + 3 = 15$ стаканов кофе за те же деньги, что и 12 стаканов. Получается, что Вася выпил в $15 : 12 = 1,25$ раза больше кофе, значит, и на каждые 100 рублей приходится в 1,25 раза больше кофе, то есть $84 \cdot 1,25 = 105$ (г).

2. Праздничный торт. Маша испекла на праздник торт, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, в основании которого – квадрат размером 4×4 (см. рисунок). Верх и четыре боковые грани торта покрыты тонким слоем шоколадной глазури постоянной толщины. Легко разрезать торт на четыре одинаковые части так, что и глазури в каждом из кусков будет поровну. А можно ли по линиям сетки разрезать торт на четыре части равного объёма так, чтобы все куски имели *разное* количество глазури?

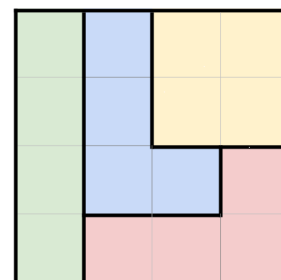


М. Евдокимов

Ответ: можно

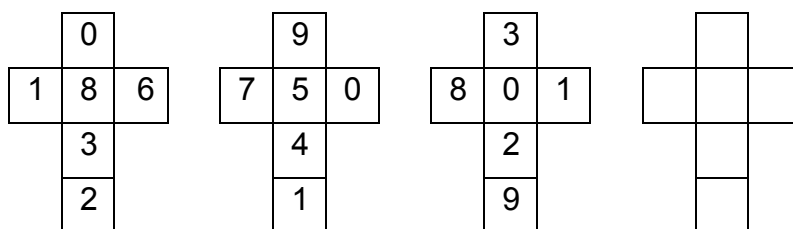
Решение. Посмотрим на торт сверху и разрежем его так, как показано на рис. 1. Все части торта имеют равную площадь основания, а значит и равный объём, при этом глазури сверху на этих частях также поровну. Но эти части имеют различную длину отрезков основания, примыкающих к границе (6, 1, 4 и 5 соответственно). Значит, на боковых гранях у кусков торта разное количество глазури.

Рис. 1



Существуют и другие примеры.

3. Календарные кубики. У Жени есть четыре «календарных» кубика, с помощью которых можно выложить любую дату в формате ЧЧММ. Например, 6 апреля – это 0604. Как устроены три кубика – показано на трёх развёртках (см. рисунок). Какие цифры написаны на четвёртом кубике? *Цифры 6 и 9 взаимозаменяемы, так как получаются друг из друга поворотом.*



М. Евдокимов

Ответ: 0, 1, 2, 4, 5, 7

Решение. Рассмотрим следующие даты: 11.11, 22.12, 04.04, 05.05 и 07.07. Заметим, что на трёх известных кубиках только три единицы, две двойки и по одной четверке, пятёрке и семёрке. Значит, четвертая единица, третья двойка и вторые четверка, пятёрка и семёрка, необходимые для перечисленных дат, обязаны быть на четвёртом кубике.

Далее рассмотрим дату 03.03. Обе цифры 0 и 3 есть на первом и третьем кубиках, поэтому мы не можем использовать их одновременно, значит, на четвёртом кубике

должна быть одна из них. Аналогичная ситуация возникнет, если рассмотреть дату 08.08. Следовательно, на четвёртом кубике должен быть еще 0.

Доказывать, что такими четырьмя кубиками можно выложить любую дату, от участников не требуется.

4. Джентльмены. Два джентльмена прогуливаются по бульвару. Каждый джентльмен идёт со своей постоянной скоростью и, дойдя до конца бульвара, мгновенно разворачивается и идёт обратно. Джентльмены начали прогулку одновременно из противоположных концов бульвара и встретились в первый раз в 50 метрах от его середины, а во второй – в 2,5 раза ближе к одному из концов, чем к другому. Найдите длину бульвара.

А. Заславский

Ответ: 700 метров

Решение. Первый способ. При первой встрече джентльмены в сумме прошли длину бульвара и первый прошёл на 100 метров больше второго. При второй встрече они в сумме прошли утроенную длину бульвара, значит, первый прошёл на 300 метров больше. С другой стороны, эта разность составляет $(2,5 - 1) : (2,5 + 1) = \frac{3}{7}$ от длины бульвара. Следовательно, эта длина равна $300 : \frac{3}{7} = 700$ (м).

Второй способ. Рассмотрим сначала вторую встречу джентльменов. Один из них к этому моменту прошёл весь бульвар и еще $2,5 : 3,5 = \frac{5}{7}$ бульвара, а второй – весь бульвар и еще $1 : 3,5 = \frac{2}{7}$ бульвара. Так как они затратили одно и то же время, то их скорости относятся так же, как пройденные ими пути: $\left(1 + \frac{5}{7}\right) : \left(1 + \frac{2}{7}\right) = \frac{12}{7} : \frac{9}{7} = \frac{4}{3}$.

Следовательно, и к моменту первой встречи джентльменов один из них прошёл 4 части пути, а второй – 3 части. При этом один из них прошёл на $50 \cdot 2 = 100$ метров меньше другого. Значит одна часть составляет 100 метров, а длина всего бульвара – 700 метров.

Закончить это решение можно иначе. Примем длину бульвара за $2x$ метров, тогда к моменту первой встречи джентльменов более быстрый прошёл $x + 50$ (м), а более медленный: $x - 50$ (м). Так как и в этом случае они затратили одно и то же время, то получим уравнение: $\frac{x + 50}{x - 50} = \frac{4}{3}$. Его решение: $x = 350$, тогда длина бульвара – 700 метров.

5. Куб. Бумажный квадрат разрезали на два равных прямоугольника и оклеили ими кирпич так, что каждая грань кирпича целиком покрыта ровно одним прямоугольником. Докажите, что из двух таких кирпичей можно сложить куб.

А. Шаповалов

Решение. Заметим, что один прямоугольник не может покрывать три грани кирпича с общей вершиной. Так как хотя бы один из прямоугольников покрывает хотя бы три грани, то им покрыты либо две противоположные грани и одна, лежащая между ними, либо обе пары противоположащих граней. Но в последнем случае второй прямоугольник не может покрыть две оставшиеся противоположащие грани (иначе грань между ними будет покрыта дважды). Значит каждый прямоугольник покрывает ровно три грани.

Пусть размеры кирпича: $a \times b \times c$. Тогда один прямоугольник покрывает грани $a \times b$, $a \times c$ и $a \times b$, а его размеры: $a \times (2b + c)$.

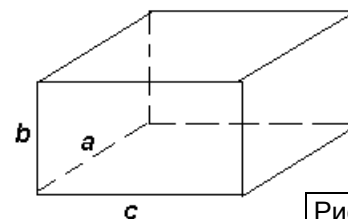


Рис. 2

Второй прямоугольник покрывает грани $b \times c$, $a \times c$ и $b \times c$, а его размеры: $(a + 2b) \times c$ (см. рис. 2). Прямоугольники равные, поэтому либо $a = a + 2b$ и $2b + c = c$, что невозможно, либо $a = c$ и $2b + c = a + 2b$ (это верно при $a = c$). Кроме того, прямоугольники получены из квадрата, поэтому $a + 2b = 2a$, откуда $b = 0,5a$.

Следовательно, из двух кирпичей можно сложить куб, если приложить их друг к другу гранями $a \times c$.

Также можно обосновать, что вершина кирпича не может лежать внутри прямоугольника. Действительно, сумма трёх углов при вершине кирпича равна 270° , а это меньше, чем 360° . Поэтому любая вершина кирпича должна лежать на границе прямоугольника. От школьников это обоснование не требуется.

6. Футболки. По кругу, повернувшись лицом к его центру, стоят 15 человек в футболках трёх цветов: пятеро – в белых, пятеро – в серых и пятеро – в чёрных. Каждый из них сказал: «Моя футболка темнее футболки моего соседа справа». Оказалось, что все, кроме Вани, солгали. Сколько человек солгали бы, если бы вместо этого каждый сказал: «Моя футболка светлее футболки моего соседа справа»?

Все футболки одного цвета друг от друга не отличаются.

Т. Казицына

Ответ: 13.

Решение. Докажем, что люди стояли так, как показано на рис. 3. Заметим, что человек в чёрной футболке, справа от которого стоит человек в серой или белой футболках, говорит правду. Такой человек только один, значит каждый из четырёх остальных стоит слева от того, кто также в чёрной футболке. Иными словами, все 5 человек в чёрных футболках стоят подряд. Аналогично, любой человек в серой футболке может стоять только слева от человека в черной или серой футболках. Значит, и все 5 человек в серых футболках стоят подряд слева от людей в чёрных футболках. Тогда и оставшиеся 5 человек в белых футболках также стоят подряд.

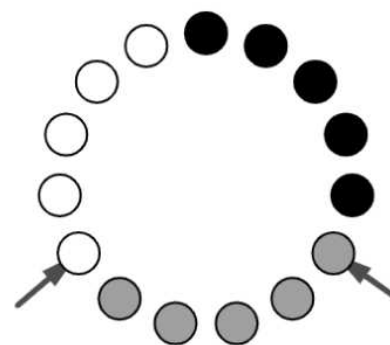


Рис. 3

Следовательно, утверждение «Моя футболка светлее футболки моего соседа справа» будет правдой ровно для двух человек, отмеченных на рисунке стрелками, а остальные 13 солгут.

7. Мыши в клетках. Подопытные мыши были разделены на две равные по количеству группы. Одну группу рассадили поровну в большие клетки, а другую – поровну в маленькие. Маленьких клеток было 15. К концу эксперимента все мыши из некоторых пяти клеток сбежали. И это была ровно одна пятая всех мышей, участвовавших в эксперименте. Сколько к концу эксперимента осталось больших клеток, в которых ещё сидят мыши?

Ответ: 8.

Решение. Пусть в каждой маленькой клетке сидело x мышей, тогда во всех маленьких клетках сидело $15x$ мышей, и столько же мышей сидело в больших клетках. Значит, всего сбежало $6x$ мышей. Пусть мыши сбежали из n маленьких клеток, и, соответственно, из $5 - n$ больших. Тогда из маленьких клеток сбежало nx мышей, а остальные $(6 - n)x$ мышей сбежали из больших клеток. Так как $n < 6$, то количество мышей, сбежавших из больших клеток, отлично от нуля. Следовательно в одной

большой клетке было $\frac{(6-n)x}{5-n}$ мышей (заметим, что при x , кратных $5 - n$, это целое число). Всего больших клеток: $15x : \frac{(6-n)x}{5-n} = \frac{15(5-n)}{6-n} = \frac{15(6-n)-15}{6-n} = 15 - \frac{15}{6-n}$.

должно быть натуральным, причём $n < 5$, так как из больших клеток мыши тоже сбежали. Следовательно, $n = 1$ или $n = 3$. Тогда больших клеток могло быть 10 или 12 соответственно, но в любом случае 8 больших клеток остались с мышами.

Можно изложить решение и без формул, если, например, провести перебор по n от 0 до 8. Либо можно заметить, что сбежавшие из пяти клеток мыши могли бы сидеть ровно в 6 маленьких клетках. Следовательно, при каком-то значении n в n маленьких клетках сидит столько же мышей, сколько в $n - 1$ больших, причём $15(n - 1)$ делится на n . При чётном n это невозможно, значит, остается рассмотреть значения $n = 3$ и $n = 5$. В обоих случаях остается 8 больших клеток с мышами.

8. Уголки. Из квадрата размером 7×7 вырезали одну клетку. Оставшуюся фигуру можно заполнить различными уголками единственным образом. Как могла располагаться вырезанная клетка? Уголок – это клетчатая фигура, полученная вырезанием из квадрата размером $n \times n$ квадрата размером $(n - 1) \times (n - 1)$.

А. Пешнин

Ответ: могла быть вырезана только угловая клетка.

Решение. Заметим, что площадь шести наименьших уголков равна $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 48$ клеток, что в точности равно площади квадрата с вырезанной клеткой. Так как сторона квадрата равна 7, то уголки большей площади использовать невозможно. Следовательно, оставшуюся фигуру заполняет именно такой набор уголков.

Докажем, что если клетка не угловая, то она не могла быть вырезана. Можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Предположим, что вырезана не угловая клетка. Тогда можно выбрать, как минимум, два способа разместить уголок со стороной 7, после чего останется квадрат размером 6×6 с вырезанной клеткой. Покажем, что каждый из этих случаев доводится до разбиения на уголки. Будем каждый раз выбирать самый большой из имеющихся уголков и ставить в текущий квадрат. Поскольку вырезана лишь одна клетка, то в каждом текущем квадрате хотя бы три угловых клетки не вырезаны. Поставив уголок, содержащий эти клетки, получим квадрат со стороной на одну клетку меньше. Действуя таким образом, квадрат размером 6×6 будет заполнен уголками.

Учитывая, что самый большой уголок можно поставить двумя различными способами, мы получили не менее двух способов разбиения исходного квадрата на уголки, если вырезана не угловая клетка. Следовательно, наше предположение неверно.

Второй способ. Назовем *широким уголком* клетчатую фигуру, полученную вырезанием из квадрата размером $n \times n$ любого квадрата размером $m \times m$, содержащего угловую клетку ($n > m$). Заметим, что любой широкий уголок естественным образом однозначно заполняется различными уголками, содержащими от $2m + 1$ клеток до $2n - 1$ клеток.

Без ограничения общности будем считать, что вырезанная клетка от левой стороны квадрата не дальше, чем от любой другой. Тогда осталось заметить, что если это клетка не угловая, то остаток можно разбить на широкие уголки хотя бы двумя способами (см. рис. 4 а, б).

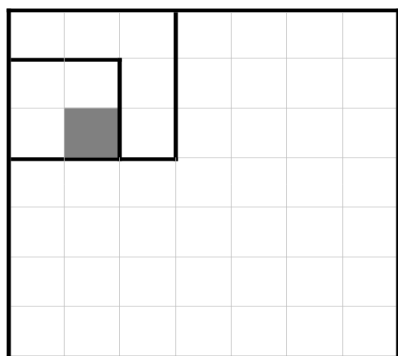
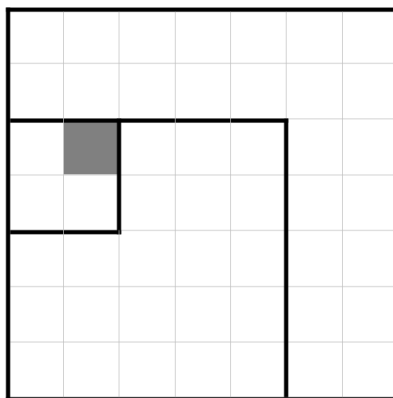


Рис. 4а



4 Рис. 4б

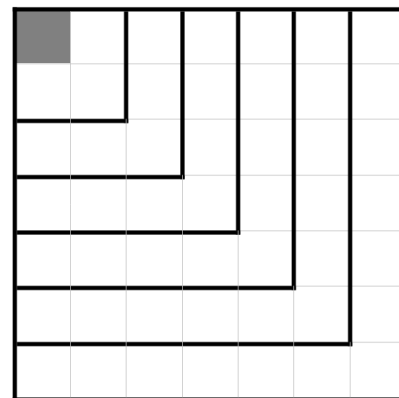


Рис. 4в

Если вырезанная клетка прилегает к стороне, то в разбиениях будут участвовать только по два широких уголка.

Если же вырезана угловая клетка, то уголок площади 13 можно расположить единственным способом, после чего останется единственный способ расположения уголка площади 11, и так далее для всех меньших уголков (см. рис. 4в).

9. Разноцветная доска. Клетки доски размером 100×100 раскрашены в 2025 цветов. Оказалось, что для каждого цвета на доску можно поставить ладью, которая бьёт все клетки этого цвета (ладья бьёт и клетку, на которой стоит). Докажите, что в каком-то ряду (горизонтальном или вертикальном) присутствуют клетки больше, чем 60 цветов.

А. Грибалко

Решение. Пусть, например, на доске n клеток красного цвета. Заметим, что красный цвет встречается в $n + 1$ ряду (если все красные клетки расположены в одном ряду или бьющая их все ладья сама стоит на красной клетке) или в $n + 2$ рядах (если красные клетки расположены и в горизонтальном, и вертикальном ряду, а их пересечение – не красная клетка).

Пусть на доске клеток i -го цвета n_i , тогда этот цвет встречается не менее, чем в $n_i + 1$ ряду. Тогда сумма всех рядов для всех цветов не меньше, чем $(n_1 + 1) + (n_2 + 1) + \dots + (n_{2025} + 1) = (n_1 + n_2 + \dots + n_{2025}) + 2025 = 12025$. Так как $12025 > 12000 = 200 \cdot 60$, то по принципу Дирихле найдется ряд, в котором есть клетки, покрашенные в более чем 60 цветов.