Двадцать первая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцать вторая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2025 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*К. Бельский*) На основании AD трапеции $ABCD$ взяли точку X, равноудаленную от вершин B и C. Докажите, что X лежит на окружности, проходящей через середины отрезков AB, AD и CD.

Решение. Пусть M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно (см. рис.8-9.1а).

Поскольку MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то она параллельна основаниям, то есть четырехугольник $MLXN$ — тоже трапеция. Докажем, что она равнобокая, откуда и будет следовать утверждение задачи. Это можно сделать по-разному.

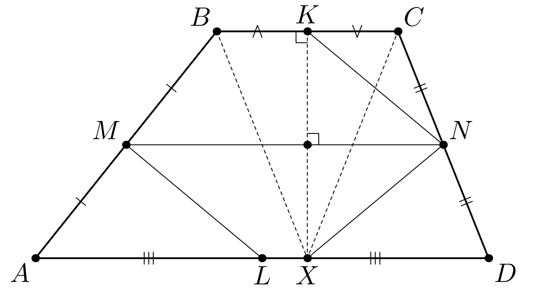


Рис. 8–9.1а

Первый способ. Воспользуемся тем, что

Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

В данном случае, $MLNK$ — параллелограмм, то есть $KN = ML$. Кроме того, $BX = CX$, то есть отрезок KX перпендикулярен основаниям AD и BC трапеции и ее средней линии MN. Поскольку средняя линия трапеции делит пополам любой отрезок с концами на основаниях, то MN — серединный перпендикуляр к отрезку KX. Следовательно, $XN = KN = ML$, то есть трапеция — равнобокая.

Ту же идею можно реализовать иначе.

Второй способ. Продлим отрезок XN на свою длину и получим точку Q (см. рис. 8-9.1б). Тогда $XCQD$ — параллелограмм и $CX = QD$. Следовательно, $BXDQ$ — равнобокая трапеция и ее диагонали QX и BD равны. Осталось воспользоваться тем, что $ML = 0{,}5BD$ как средняя линия треугольника ABD.

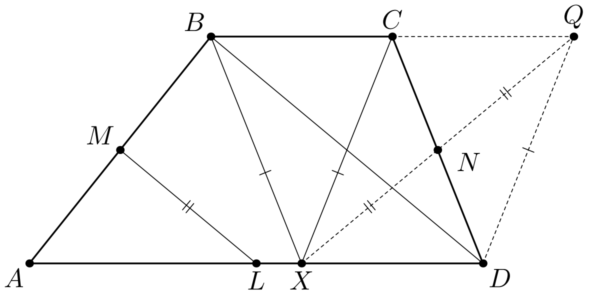


Рис. 8–9.1б

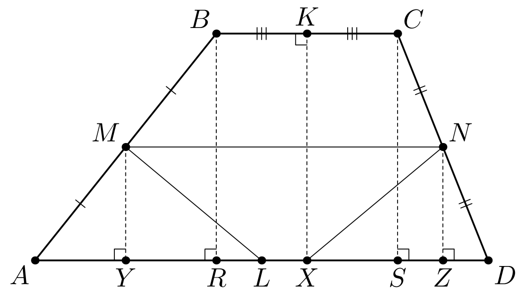


Рис. 8–9.1в

Третий способ. Докажем, что проекции боковых сторон трапеции $MLXN$ на прямую AD равны, откуда также следует утверждение задачи.

Опустим перпендикуляры MY, BR, CS и NZ на прямую AD. Докажем, что $YL = XZ$. Используя, что KX — серединный перпендикуляр к противолежащим сторонам прямоугольника $RBCS$ и средние линии треугольников ABR и DCS, получим: $YL = AL - AY = 0{,}5AD - 0{,}5AR = 0{,}5RD$. Аналогично, $XZ = XS + SZ = 0{,}5RS + 0{,}5SD = 0{,}5RD$, что и требовалось.

При другом расположении точек доказательство аналогично.

Комментарий.

Утверждение задачи можно рассматривать как аналог известного утверждения для треугольника. А именно: если взять середины трех сторон и точку, симметричную вершине относительно средней линии (то есть основание высоты), то указанные точки будут лежать на одной окружности (окружность девяти точек).

Здесь же мы «раздвоили» одну из вершин треугольника, получили точки B и C и отразили середину BC (точку K) относительно MN (средней линии трапеции).

2. (*Г. Минаев*) В четырёхугольнике $ABCD$ углы A, B и C равны 57°, 122° и 57° соответственно. Докажите, что длина ломаной ABC больше длины ломаной ADC.

Решение. Заметим, что угол D четырехугольника равен 124°, то есть больше угла B. Рассмотрим точку X такую, что $ADCX$ — параллелограмм (см. рис. 8–9.2).

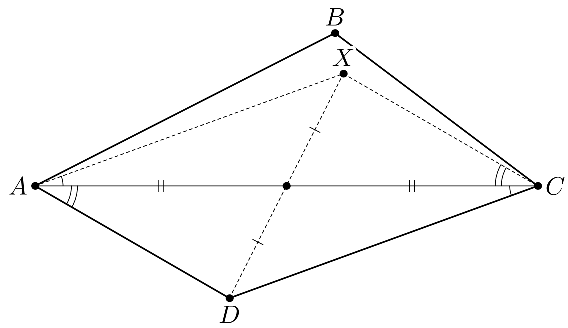


Рис. 8–9.2

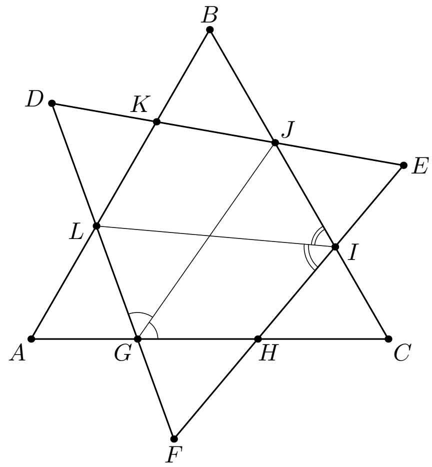
Достаточно будет доказать, что точка X лежит внутри треугольника ABC. Действительно, тогда по «неравенству резинки» $AX + CX < AB + CB$. Останется использовать равенство противолежащих сторон параллелограмма.

Докажем, что угол XAD меньше угла BAD, а угол XCD меньше угла BCD.

Заметим, что $\angle XAD = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ < 57^\circ = \angle BAD$. Аналогично для другой пары углов. Кроме того, точки B и X лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC.

Следовательно, точка X лежит внутри треугольника ABC, что и требовалось.

3. (*К. Байрак*, 11 класс) Пусть равные правильные треугольники ABC и DEF пересекаются по шестиугольнику $KJIHGL$ (см. рис.). Известно, что биссектриса угла HGL проходит через J, а биссектриса угла HIJ — через L. Докажите, что вписанные окружности этих треугольников совпадают.



Решение. Докажем, что шестиугольник $KJIHGL$ — описанный, откуда и будет следовать утверждение задачи. Для этого достаточно показать, что точка Z пересечения биссектрис углов HGL и HIJ принадлежит биссектрисам остальных углов шестиугольника, то есть равноудалена от всех его сторон (см. рис. 8–9.3).

Рассмотрим треугольники LBI и LFI. Поскольку углы B и F равны 60°, а IL — биссектриса угла HIJ, то $\angle BLI = \angle FLI$, то есть LI — биссектриса угла KLG. Аналогично, JG — биссектриса угла KJI.

Дальше можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Докажем, что Z лежит на биссектрисе угла K, откуда и будет следовать утверждение задачи.

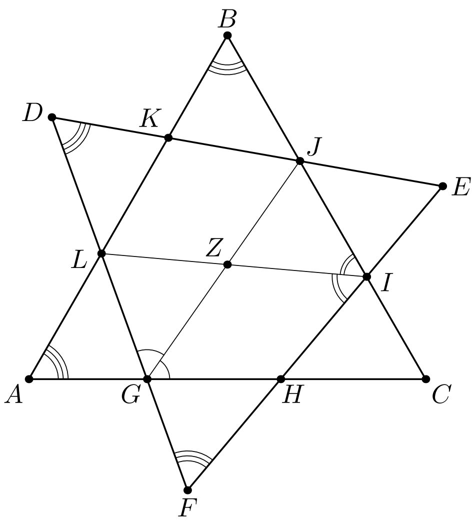


Рис. 8–9.3

Заметим, что треугольники LBI и LFI равны по стороне и прилежащим к ней углам. Следовательно, $FL = BL$. Поскольку $AB = DF$, то $AL = DL$, откуда следует равенство треугольников ALG и DLK по стороне и прилежащим к ней углам.

Заметим, что Z — центр вневписанной окружности треугольника ALG, так как лежит на пересечении биссектрис двух внешних углов, а расстояние от Z до прямых LG и LK — радиус этой окружности. Поскольку радиусы вневписанных окружностей у равных треугольников равны, то расстояния от точки Z до указанных прямых равно радиусу вневписанной окружности треугольника DLK. Кроме того, Z лежит на биссектрисе внешнего угла L треугольника DLK, то есть Z — центр вневписанной окружности и для треугольника DLK. Следовательно, Z лежит на биссектрисе угла K шестиугольника, что и требовалось.

Равенство треугольников можно было получить чуть иначе.

Второй способ. Используем следующий факт.

Сумма расстояний от точки, лежащей на основании равнобедренного треугольника, до его боковых сторон постоянна и равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне.

Заметим, что точка L лежит на сторонах AB и FD равных равносторонних треугольников ABC и DEF. Тогда для нее одинакова и сумма указанных расстояний. Кроме того, L равноудалена от прямых BC и EF, поскольку лежит на биссектрисе угла I.

Следовательно, L равноудалена от AC и DE, то есть равны высоты в треугольниках ALG и DLK, откуда также следует равенство этих треугольников.

Дальнейшее аналогично первому способу решения.

Можно и не доказывать равенство треугольников, а использовать более сильный факт, связанный с расстояниями.

Третий способ. Используем следующий факт.

Сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон постоянна и равна высоте этого треугольника.

В данном случае, Z удалена от сторон AB, AC и DF на одно и то же расстояние x и от сторон BC, DE и EF на одно и то же расстояние y. Тогда суммы расстояний до сторон этих треугольников равны $2x + y$ и $2y + x$, откуда $x = y$ и точка Z равноудалена от всех сторон шестиугольника.

Комментарии.

1. Факт, использованный во втором способе решения, можно доказать, например, достроив равнобедренный треугольник до ромба. Также можно использовать синусы углов или площадь треугольника.

2. Факт, использованный в третьем способе решения, можно свести к предыдущему факту или воспользоваться формулой площади треугольника.

3. В решении фактически доказано, что в шестиугольнике $KJIHGL$ все стороны равны, а углы равны через один. Такие многоугольники называются полуправильными.

4. Также можно было доказать, что данные правильные треугольники симметричны относительно прямой IL и прямой JG. Тогда центры их вписанных окружностей должны быть симметричны относительно обеих прямых, то есть совпадают.

4. (*М. Евдокимов*) Дан треугольник ABD. Рассмотрим произвольную точку C такую, что $BC = AB$, а четырёхугольник $ABCD$ — выпуклый. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Окружность, описанная около треугольника KCD, вторично пересекает отрезок AD в точке N. Докажите, что все прямые CN, построенные таким образом, проходят через фиксированную точку.

Решение. Заметим, что точка C лежит на фиксированной окружности с центром в точке B. Пусть эта окружность пересекает прямую CN в точке X, отличной от C (см. рис. 8–9.4). Докажем, что положение точки X не зависит от положения точки C.

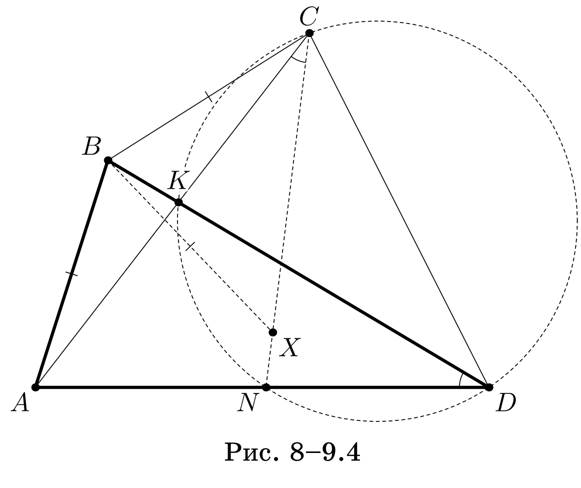


Рис. 8–9.4

Заметим, что $\angle ACX = \angle KCN = \angle KDN = \angle ADB$, используя равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу.

Поскольку угол ADB фиксирован, то и угол ACX фиксирован. Кроме того, $BA = BC = BX$, то есть B — центр окружности, описанной около треугольника ACX. Следовательно, $\angle ABX = 2\angle ACX$, то есть угол ABX также фиксирован. Кроме того, $BA = BX$, а точки C и X лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB, то есть точка X — фиксирована, что и требовалось.

5. (*М. Векшин, 11 класс*) Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, X симметрична I относительно серединного перпендикуляра к стороне BC, Q и R — середины дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащих вершин треугольника ABC. Точка B' симметрична точке B относительно Q, а точка C' симметрична точке C относительно R. Докажите, что точки B', I, X и C' лежат на одной окружности.

Решение. Пусть N — середина дуги BAC (см. рис. 8–9.5). Докажем, что точка N равноудалена от указанных точек, откуда и будет следовать утверждение задачи.

Из условия следует, что точка N равноудалена от X и I, так как она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Тогда достаточно будет показать, что она также лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам $C'I$ и $B'I$.

Докажем это утверждение для отрезка $C'I$ (для $B'I$ доказательство аналогично).

Заметим, что $RC' = RC = RI$ по лемме о трезубце. Следовательно, треугольник CIC' — прямоугольный. Теперь достаточно доказать, что прямая RN содержит его среднюю линию, то есть параллельность прямых RN и CI.

Это можно сделать, например, так.

$\smile QN = \smile BN - \smile BQ = 180^\circ - \angle A - \angle C = \angle B = \smile CR$, откуда следует искомая параллельность.

Итак, точка N равноудалена от точек B', I, X и C', то есть эти точки лежат на окружности с центром в N.

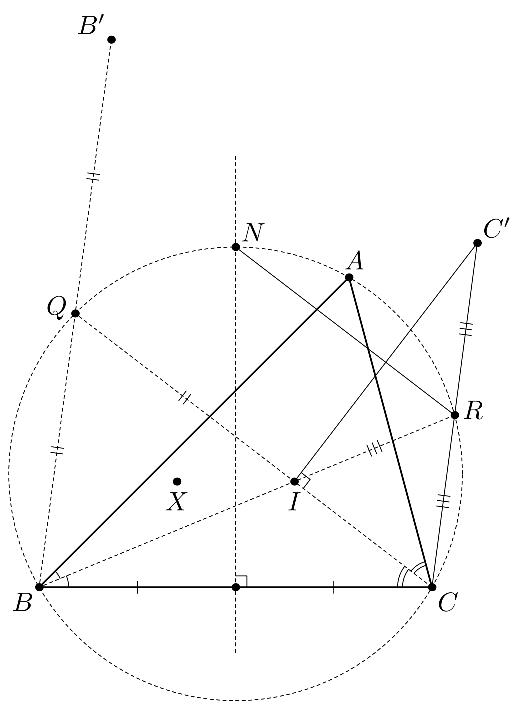


Рис. 8–9.5

Комментарий.

Последнее утверждение можно было доказать, рассмотрев треугольник $I_aI_cI_b$, образованный центрами вневписанных окружностей исходного треугольника. Тогда окружность, описанная около ABC, для такого треугольника является окружностью девяти точек, то есть точка N — середина отрезка I_cI_b, а NR — средняя линия треугольника I_cII_b.

6. (*Ю. Блинков*, *Д. Швецов*) На доске нарисованы прямые, содержащие стороны треугольника ABC, отмечен центр его вневписанной окружности, касающейся стороны AB, и две точки касания этой окружности с продолжениями двух других сторон. Используя только линейку (без делений), постройте середину стороны AB, проведя не более шести линий.

Решение. Пусть даны прямые, содержащие стороны треугольника ABC, центр I_c вневписанной окружности и точки B_1 и A_1 касания этой окружности с прямыми AC и BC соответственно.

Обозначим точку касания этой окружности со стороной AB через C_1, а середину AB через M.

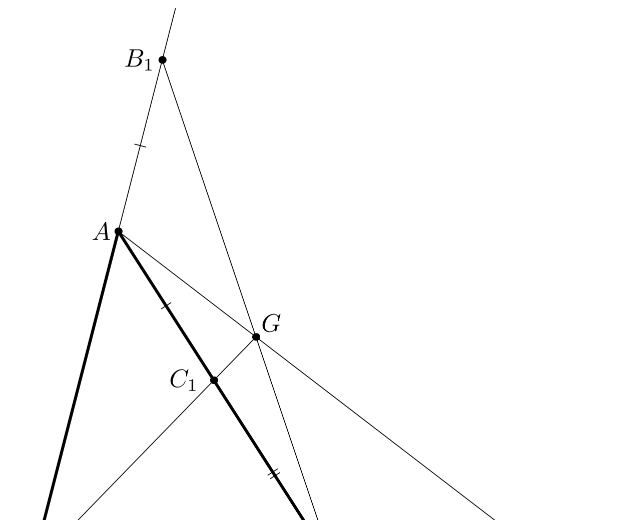


Рис. 8–9.6а

Докажем, что:

1) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (см. рис. 8–9.6а).

2) прямые I_cC_1, A_1B_1 и CM пересекаются в одной точке (см. рис. 8–9.6б).

Докажем первое утверждение.

Введем стандартные обозначения: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, p — полупериметр.

Заметим, что $AB_1 = AC_1 = p - b$, $BA_1 = BC_1 = p - a$, $CA_1 = CB_1 = p$.

Тогда, применив обобщенную теорему Чевы для треугольника ABC и прямых AA_1, BB_1 и CC_1, получим: $\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = 1$, откуда и следует первое утверждение.

Теперь докажем второе утверждение.

Пусть прямые I_cC_1 и A_1B_1 пересекаются точке K. Докажем, что прямая CK содержит медиану CM треугольника ABC. Проведем через точку K прямую параллельную AB, пересекающую прямые CA и CB в точках P и Q соответственно. Учитывая замечательное свойство трапеции (или подобие треугольников CAB и CPQ), достаточно доказать, что точка K является серединой отрезка PQ. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что треугольник PI_cQ — равнобедренный, то есть равенство углов при вершинах P и Q.

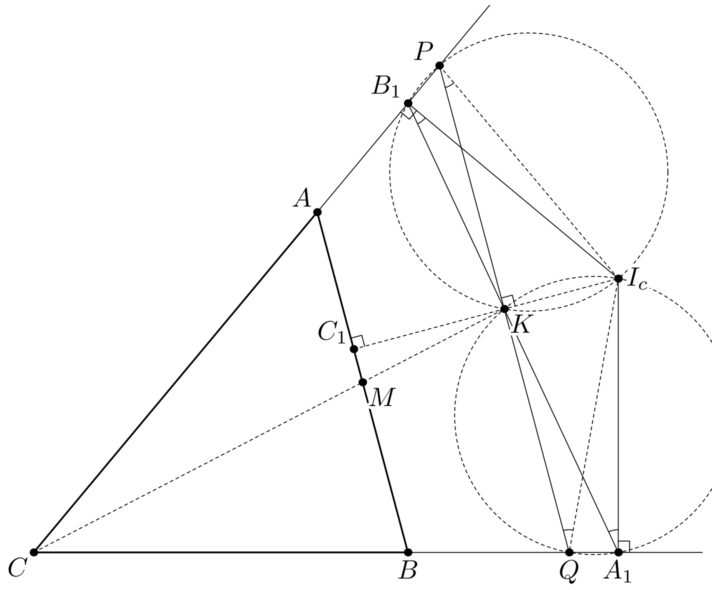


Рис. 8–9.6б

Поскольку прямая I_cC_1 перпендикулярна PQ, то четырехугольники PI_cKB_1 и QKI_cA_1 — вписанные, откуда $\angle KPI_c = \angle KB_1I_c$ и $\angle KQI_c = \angle KA_1I_c$. Осталось заметить, что треугольник $B_1I_cA_1$ — равнобедренный, откуда и следует искомое равенство углов.

Отсюда вытекает способ построения.

1) строим прямые AA_1 и BB_1 и их точку пересечения G (две линии);

2) строим прямую CG и ее пересечение C_1 с прямой AB (третья линия);

3) строим прямые A_1B_1 и I_cC_1 и получаем точку K их пересечения (четвертая и пятая линии);

4) строим прямую CK (шестая линия).

Точка пересечения CK и AB — искомая точка M.

Комментарии.

1. Точка G из первого утверждения — одна из так называемых **внешних** точек Жергонна (точка пересечения прямых, проходящих через вершину треугольника и точку касания вневписанной окружности с прямыми, содержащими стороны треугольника).

2. Отметим, что второе утверждение верно для любой точки, лежащей на биссектрисе и перпендикуляров, опущенных из нее на прямые, содержащие стороны треугольника. Действительно, мы использовали лишь равноудаленность точки I_c от прямых, содержащих стороны треугольника. Более подробно про соответствующую конструкцию можно прочитать здесь: Д. Прокопенко, Д. Швецов, «*Вокруг точки на медиане*», Квант, 2020, номер 2, 42-46.

3. Можно сформулировать аналогичную задачу, если даны точки касания и центр вписанной окружности.

4. Отметим, что I_c — центр поворота, переводящего указанные на чертеже окружности друг в друга.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский.

Двадцать первая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцать вторая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2025 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*М. Евдокимов*) В прямоугольном неравнобедренном треугольнике проведена высота. В исходный треугольник и в два образовавшихся вписали квадраты так, что одна из сторон каждого квадрата лежит на гипотенузе треугольника, в который вписан этот квадрат. Вася отметил все вершины трёх квадратов (некоторые точки могли совпасть). Сколько различных точек отмечено?

Ответ: 9.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с прямым углом C. Пусть CH — его высота.

Введем стандартные обозначения: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $CH = h$ (см. рис. 10–11.1).

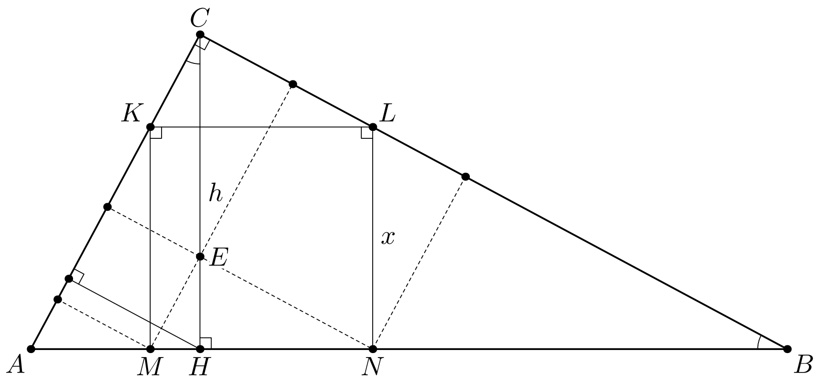


Рис. 10–11.1

Найдем сторону квадрата $MKLN$, вписанного в исходный треугольник. Используя две пары подобных треугольников, получим: $\frac{x}{c} + \frac{x}{h} = \frac{CK}{CA} + \frac{KA}{CA} = 1$, где x — сторона квадрата. Следовательно, $x = \frac{ch}{c+h}$. Из того же подобия найдем отношение $\frac{HM}{MA} = \frac{CK}{KA}$.

$\frac{KA}{CA} = \frac{MK}{CH} = \frac{c}{c+h}$, то есть $\frac{HM}{MA} = \frac{CK}{KA} = \frac{h}{c}$.

Итак, мы получили отношение, в котором вершина квадрата должна делить катет прямоугольного треугольника, в который вписан данный квадрат.

Докажем, что точка M также является вершиной квадрата, вписанного в треугольник ACH, а точка N — в BCH.

Для этого достаточно показать, что $\frac{h}{c} = \frac{h_1}{b}$, где h_1 — высота треугольника ACH. Это, в свою очередь, равносильно равенству $\frac{h_1}{h} = \frac{b}{c}$, которое можно получить из подобия или вычислив синус угла B.

Итак, две пары точек совпали.

Кроме того, точка E — вершина квадрата, вписанного в треугольник ACH, делит высоту CH в таком же отношении. Аналогично для точки F, являющейся вершиной квадрата, вписанного в треугольник BCH и также лежащей на высоте CH.

Следовательно, точки E и F совпадают.

Осталось заметить, что вершина K не является вершиной квадрата, вписанного в треугольник ACH, так как диагональ этого квадрата не параллельна высоте CH в неравнобедренном треугольнике ABC. Аналогично для точки L.

Итак, совпали 3 из 12 точек, то есть различных точек ровно 9.

Комментарий. Если треугольник ABC равнобедренный, то совпадут еще две пары точек.

2. (*Д. Прокопенко*) Дан прямоугольный тетраэдр с ребрами a, b и c, выходящими из вершины прямого трехгранного угла. Найдите радиус наименьшей сферы, содержащей такой тетраэдр.

Ответ: $\dfrac{xyz}{4\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}}$, где $x=\sqrt{a^2+b^2}$, $y=\sqrt{c^2+b^2}$, $z=\sqrt{a^2+c^2}$, а $p=\dfrac{x+y+z}{2}$.

Решение. Пусть $DABC$ — прямоугольный тетраэдр с прямыми углами при вершине D (см. рис. 10–11.2а).

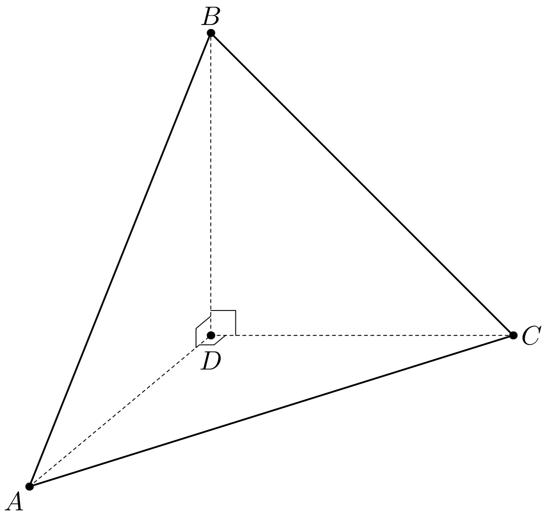


Рис. 10–11.2а

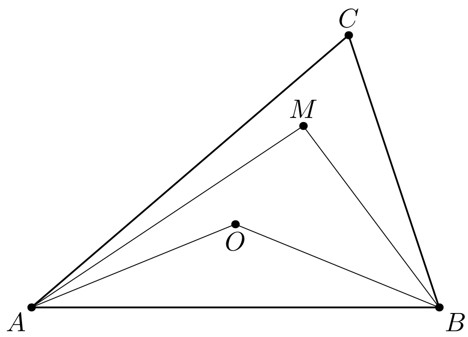


Рис. 10–11.2б

Докажем, что искомый радиус сферы — радиус описанной окружности треугольника ABC.

Заметим, что искомая сфера содержит треугольник ABC, то есть сечение этой сферы плоскостью ABC должно покрывать этот треугольник. Следовательно, покрыть тетраэдр сферой меньшего радиуса, чем радиус наименьшей окружности, содержащей треугольник ABC, невозможно.

Покажем теперь, что такая окружность является описанной окружностью треугольника ABC, а сфера с указанным радиусом содержит тетраэдр $DABC$.

Поскольку стороны треугольника ABC равны $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{c^2+b^2}$ и $\sqrt{a^2+c^2}$, то, по следствию из теоремы косинусов, ABC — остроугольный.

Докажем, что для остроугольного треугольника искомой окружностью является описанная. Пусть O — центр описанной окружности, а R — ее радиус.

Достаточно показать, что для любой точки M, отличной от O, лежащей в плоскости треугольника ABC, хотя бы одно из расстояний до вершин треугольника больше R (см. рис. 10–11.2б).

Заметим, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит внутри него, то есть содержится в одном из треугольников AMB, BMC или AMC (внутри или на границе) вне зависимости от расположения точки M. Без ограничения общности, пусть O содержится в треугольнике AMB. Тогда, по "неравенству резинки", $AM+MB > AO+OB = 2R$, то есть хотя бы один из отрезков AM или MB больше, чем R.

Осталось показать, что сфера с центром O и радиусом R содержит точку D.

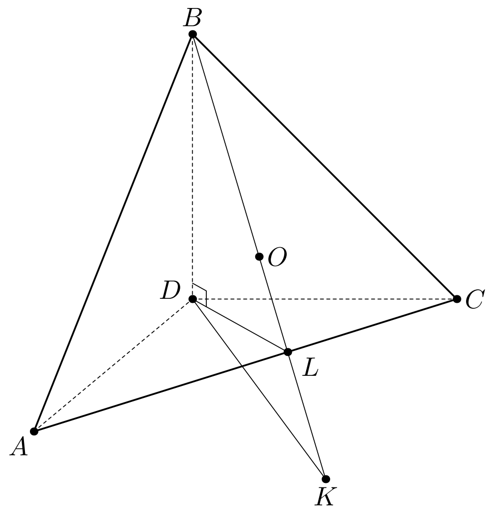


Рис. 10–11.2в

Проведем диаметр BK окружности, описанной около треугольника ABC. Поскольку треугольник остроугольный, то отрезок BK пересекает сторону AC в какой-то точке L. Так как прямая BD перпендикулярна плоскости ADC, то угол BDL — прямой, а угол BDK — тупой.

Следовательно, точка D лежит внутри окружности с диаметром BK, проведенной в плоскости BDK, то есть внутри сферы с диаметром BK.

Найдем искомый радиус, поделив произведение сторон треугольника ABC на четыре его площади.

3. (*Ю. Блинков*) На доске нарисованы прямые, содержащие стороны прямоугольного треугольника, и отмечены две точки касания вневписанной окружности, касающейся гипотенузы, с продолжениями катетов. Используя только линейку (без делений), постройте точки касания вневписанных окружностей с катетами, проведя не более пяти линий.

Решение. Пусть даны прямые, содержащие стороны прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C и точки B_1 и A_1 касания вневписанной окружности с прямыми AC и BC соответственно.

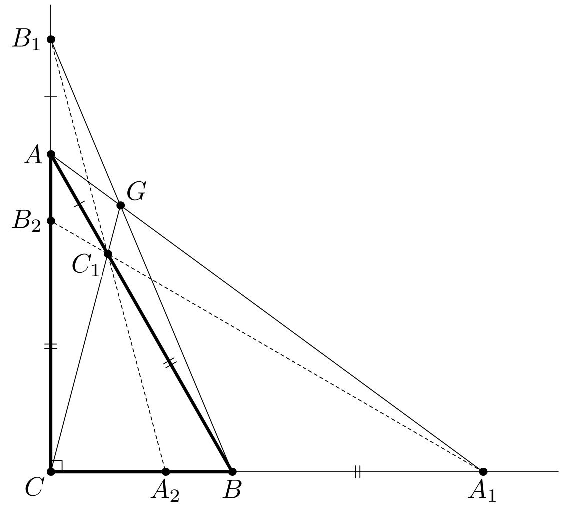


Рис. 10–11.3

Обозначим точку касания этой окружности с гипотенузой через C_1, а точки, которые необходимо построить, через B_2 и A_2 (см. рис. 10–11.3).

Докажем, что:

1) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке;

2) точки A_1, C_1 и B_2 (и аналогично B_1, C_1 и A_2) лежат на одной прямой.

Введем стандартные обозначения: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, p — полупериметр.

Заметим, что $AB_1 = AC_1 = p - b$, $BA_1 = BC_1 = CB_2 = p - a$, $AB_2 = p - c$, $CB_1 = CA_1 = p$.

Тогда, применив обобщенную теорему Чевы для треугольника ABC и прямых AA_1, BB_1 и CC_1, получим: $\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = 1$, откуда и следует первое утверждение.

Кроме того, в прямоугольном треугольнике выполняется равенство $(a+b+c)(a+b-c) = 2ab$, откуда следует, что $p(p - c) = (p - a)(p - b)$, если использовать формулу Герона. Также можно использовать формулы площади треугольника через радиусы вписанной и вневписанной окружностей.

Применив теперь теорему Менелая для треугольника ABC и точек B_2, C_1 и A_1, получим: $\frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = 1$, откуда следует второе утверждение.

Отсюда вытекает способ построения.

1. Строим прямые AA_1 и BB_1 и их точку пересечения G (две линии).

2. Строим прямую CG и ее пересечение C_1 с прямой AB (третья линия).

3. Строим прямые A_1C_1 и B_1C_1 до пересечения с катетами AC и BC соответственно (точки B_2 и A_2) (четвертая и пятая линии).

Комментарии.

1. Точка G из первого утверждения — одна из так называемых **внешних** точек Жергонна (точка пересечения прямых, проходящих через вершину произвольного треугольника и точку касания вневписанной окружности с прямыми, содержащими стороны этого треугольника).

2. Второе утверждение можно доказать иначе. Заметим, что прямая A_1C_1 параллельна биссектрисе угла B треугольника ABC. Кроме того, радиус I_bB_2 вневписанной окружности, касающейся катета AC, равен $p - a$, то есть $A_1BI_bB_2$ — параллелограмм, откуда A_1B_2 также параллельна биссектрисе угла B.

4. (*А. Заславский*) Четырехугольник $ABCD$, противолежащие стороны которого не параллельны, вписан в окружность. Пусть XY — произвольный диаметр этой окружности, P — проекция точки X на прямую AB, Q — проекция точки Y на прямую CD. Найдите ГМТ середин отрезков PQ.

Ответ: окружность с центром в точке пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ и радиусом $0{,}5R\sin\alpha$, где R — радиус исходной окружности, а α — угол между прямыми AB и CD.

Решение. Пусть O — центр окружности, K — середина отрезка CD, L — середина AB, M — середина PQ. Рассмотрим диаметр C_1D_1, параллельный CD, Q_1 — проекцию точки

Y на него и точку M_1 — середину отрезка PQ_1 (см. рис. 10–11.4а). Тогда MM_1 является средней линией треугольника PQQ_1, то есть $\overrightarrow{MM_1} = 0{,}5\overrightarrow{QQ_1}$. Следовательно, ГМТ M получается из ГМТ M_1 с помощью параллельного переноса на вектор, равный половине фиксированного вектора $\overrightarrow{OK}$.

Проделав теперь аналогичное построение с хордой AB, получим, что ГМТ M_1 получается из найденного ГМТ M_2 аналогичным переносом, но на вектор, равный половине $\overrightarrow{OL}$.

Тогда достаточно будет рассмотреть в качестве прямых AB и CD диаметры и применить к полученному ГМТ композицию параллельных переносов, то есть перенос на вектор $0{,}5(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL})$.

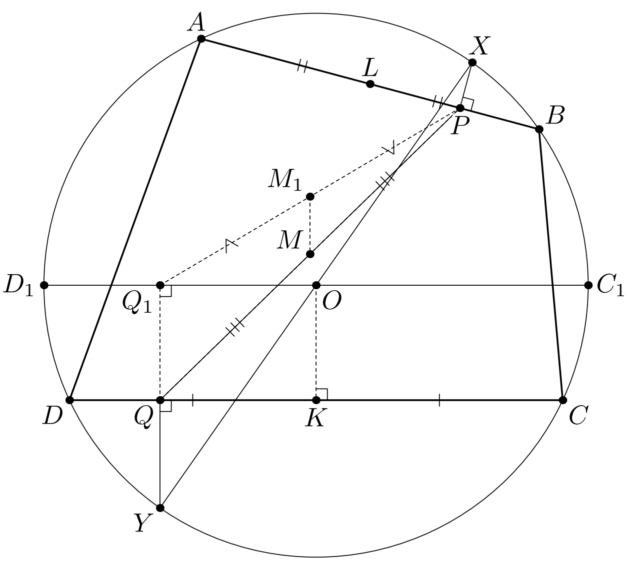


Рис. 10–11.4а

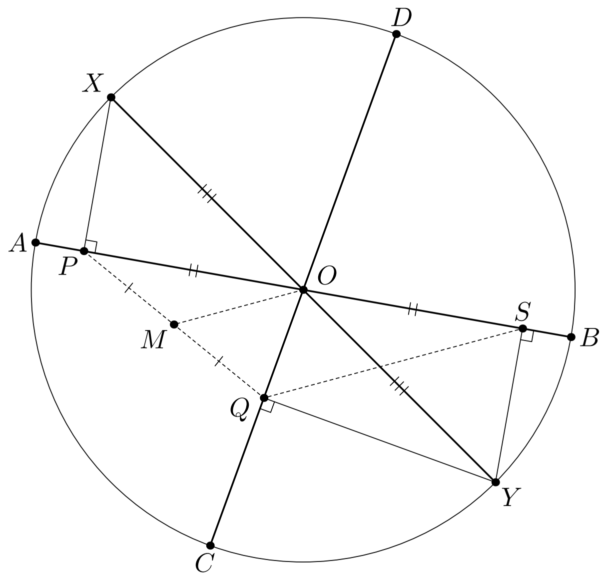


Рис. 10–11.4б

Итак, рассмотрим ситуацию, когда AB и CD — два различных фиксированных диаметра, а M — середина отрезка PQ (см. рис. 10–11.4б).

Пусть S — проекция Y на AB. Тогда $OP = OS$, в силу симметрии, а OM — средняя линия треугольника PSQ.

Заметим, что $\dfrac{SQ}{\sin\angle SOQ} = OY$ по следствию из теоремы синусов для треугольника SOQ.

Тогда длина отрезка SQ — фиксирована, то есть длина OM также фиксирована.

Следовательно, точка M лежит на окружности с центром O и радиусом $0{,}5R\sin\alpha$, где R — радиус исходной окружности, а α — угол между прямыми AB и CD.

Осталось показать, что для всех точек M этой окружности найдется такой диаметр XY.

Если точка M лежит, например, внутри угла AOC на расстоянии $0{,}5R\sin\alpha$ от O, то по ней мы можем восстановить точки P и Q, использовав симметрию относительно точки M. Отразив P относительно O, получим точку S, причем отрезок $QS = R\sin\alpha$. Следовательно, перпендикуляры, восстановленные из точек Q и S к прямым CD и AB соответственно, пересекутся в точке Y такой, что $OY = R$, то есть лежащей на изначальной окружности. Теперь достаточно провести диаметр через Y и восстановить точку X.

Если точка M лежит, например, на хорде AB, то в качестве точки Q надо взять точку O, а в качестве точки P — симметричную O относительно M. Дальнейшее построение точек X и Y очевидно.

Выполнив теперь перенос полученной окружности на вектор $0{,}5(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL})$, а прямых AB и CD на вектора $0{,}5\overrightarrow{OL}$ и $0{,}5\overrightarrow{OK}$ соответственно, получим исходный четырехугольник и искомое ГМТ.

Комментарии.

1. Заметим, что часть решения можно упростить, если использовать векторные равенства.

Пусть N — середина KL (центроид четырехугольника $ABCD$). Тогда $\overrightarrow{NM} = \dfrac{\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{KQ}}{2}$. Докажем, что длина вектора $\overrightarrow{NM}$ не зависит от положения отрезка XY.

Отложив вектора $\overrightarrow{LP}$ и $\overrightarrow{KQ}$ от точки O, получим, что вектор $\overrightarrow{KQ}$ на рисунке 10-11.4а является вектором $\overrightarrow{OQ}$ на рисунке 10-11.4б, а вектор $\overrightarrow{LP}$ — вектором $\overrightarrow{OP}$. Учитывая, что сумма $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ равна $\overrightarrow{SQ}$, длина которого фиксирована, получим требуемое.

2. Также возможно решение, использующее комплексные числа. Примем описанную окружность четырехугольника за единичную окружность комплексной плоскости. Пусть точкам A, B, C, D, X и Y соответствуют комплексные числа a, b, c, d, z и $-z$. Далее найдем координаты точек P и Q, используя координаты точек, симметричных X и Y относительно прямых AB и CD соответственно. Останется выразить расстояние от точки M до центроида четырехугольника.

5. (*Г. Забазнов*) Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне BC, а также прямые AB и AC образуют треугольник $\triangle$. Пусть L — точка пересечения касательных в точках B и C к окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая AL вторично пересекает эту окружность в точке G; M — середина BC. Докажите, что окружности, описанные около треугольников LGM и $\triangle$, касаются.

Решение. Пусть серединный перпендикуляр к стороне BC, а также прямые AB и AC образуют треугольник AXY (см. рис. 10–11.5).

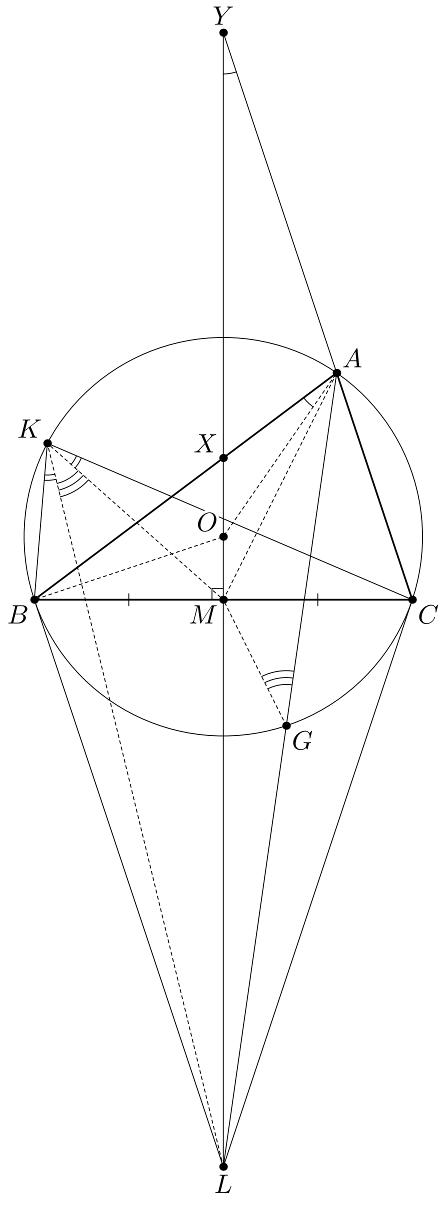


Рис. 10–11.5

Докажем, что указанные окружности имеют общую точку и общую касательную в этой точке.

Для этого достаточно будет показать, что:

1) указанные окружности пересекаются на описанной окружности треугольника ABC;

2) степень точки O относительно указанных окружностей одинакова и равна квадрату радиуса R описанной окружности.

Действительно, если точка O лежит на радикальной оси двух окружностей и ее степень есть квадрат расстояния до их общей точки, то окружности касаются.

Докажем сначала второе утверждение.

Поскольку BM — высота прямоугольного треугольника OBL, то $OM \cdot OL = OB^2 = R^2$, то есть для окружности, описанной около треугольников LGM, указанное условие выполняется.

Кроме того, $\angle AYX = \angle CYM = 90^\circ - \angle C = \angle BAO$, то есть OA — касательная к окружности, описанной около треугольника AXY, и $OX \cdot OY = OA^2 = R^2$, то есть для окружности, описанной около треугольника $\triangle$, указанное условие также выполняется.

Для доказательства первого утверждения покажем, что точка K — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников LGM и ABC, лежит на окружности, описанной около треугольника $\triangle$.

Для этого достаточно показать, что точка K лежит на окружности, описанной около треугольника BMX.

Действительно, рассмотрим четыре прямые: AB, BC, AC и XY, которые образуют четыре треугольника: ABC, AXY, MYC и BMX и воспользуемся следующим утверждением.

Четыре прямые образуют четыре треугольника. Тогда окружности, описанные около этих треугольников, имеют общую точку (точка Микеля).

В данном случае, точка K лежит на окружности, описанной около ABC. То есть она лежит на окружности, описанной около треугольника AXY, тогда и только тогда, когда она лежит на окружности, описанной около треугольника BMX.

Докажем, что $\angle BKM = \angle BXM = 90^\circ - \angle B$, откуда и будет следовать искомое.

Воспользуемся основным свойством симедианы (прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы).

Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке L. Тогда прямая AL содержит симедиану треугольника ABC.

В данном случае, AL является симедианой треугольника BAC, а KL является симедианой треугольника BKC.

Отсюда получаем равенство углов: $\angle BKL = \angle CKM$.

Используя прямоугольный треугольник LBO и свойство секущих, получим: $LM \cdot LO = LB^2 = LG \cdot LA$. Следовательно, точки A, O, M и G лежат на одной окружности и $\angle AOM + \angle AGM = 180^\circ$.

Обозначим: $\angle BKL = \angle CKM = x$, $\angle AGM = \angle MKL = y$, учитывая, что точки K, M, G и L лежат на одной окружности.

Тогда $\angle BAC = \angle BKC = 2x + y$.

$180^\circ - y = \angle AOM = \angle AOC + \angle MOC = 2\angle ABC + \angle BAC = 2\angle ABC + 2x + y$. Следовательно, $\angle BKM = x + y = 90^\circ - \angle ABC = \angle BXM$, что и требовалось.

Комментарии.

1. Про точку Микеля можно прочитать, например, здесь: В.В. Прасолов «*Задачи по планиметрии*», глава 2.

2. О свойствах симедианы можно прочитать здесь: https://geometry.ru/articles/symmedian_blinkov.pdf.

3. То, что точки A, O, M и G лежат на одной окружности, можно доказать, например, используя свойство симедианы или инверсию. Про свойства инверсии можно прочитать, например, здесь: В. В. Прасолов «*Задачи по планиметрии*», глава 28.

4. Возможно рассуждение, также использующее точку Микеля, при котором точка K определяется как вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника $\triangle$, с окружностью, описанной около треугольника ABC. При этом наличие общей касательной можно доказать подсчетом углов.

6. (*Я. Щербатов*) В треугольнике ABC биссектрисы BF и CE пересекаются в точке I, G — середина EF, K — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведенных в точках B и C. Докажите, что точки K, I и G лежат на одной прямой.

Решение. *Первый способ.* Будем рассматривать ориентированные расстояния от точек до прямых, содержащих стороны треугольника.

Это значит, например, что расстояния от точки K, лежащей внутри угла BAC, но вне треугольника ABC, до прямых AB и AC мы будем брать с знаком «$+$», а до прямой BC — со знаком «$-$».

Кроме того, используем формулу для координат точки, делящей отрезок в заданном отношении. Если, например, точка делит отрезок AB в отношении $m : n$ (считая от точки A), а расстояния (ориентированные) от точек A и B до произвольной прямой l равны a и b соответственно, то ориентированное расстояние от точки M до этой прямой равно $\dfrac{mb + na}{m + n}$.

Используем следующий факт.

Для любой точки прямой, проходящей через основания двух биссектрис треугольника, расстояние до одной прямой, содержащей сторону, равно сумме расстояний до двух других прямых, содержащих стороны треугольника.

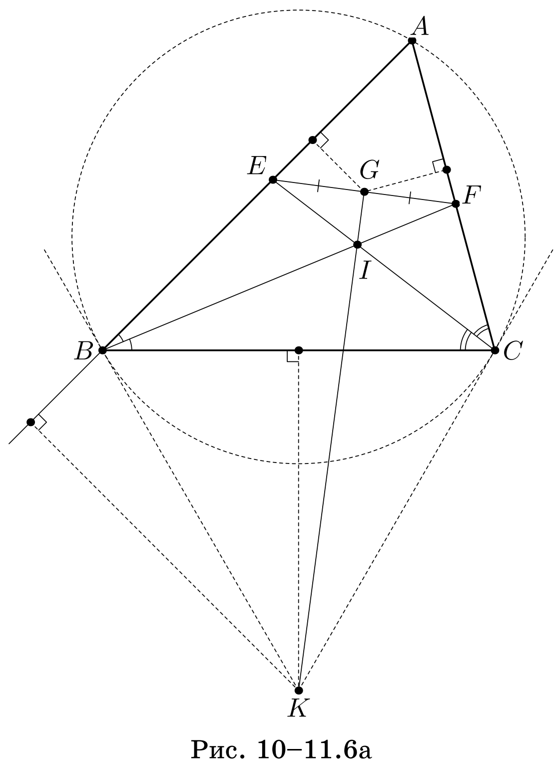


Рис. 10–11.6а

Найдем ориентированные расстояния для точек K, I и G до прямых, содержащих стороны треугольника ABC.

Введем стандартные обозначения: $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Тогда $AE = \frac{bc}{a+b}$, а $AF = \frac{bc}{a+c}$, используя свойство биссектрисы.

Заметим, что отношение модулей расстояний от точки K до прямых AB и BC равно отношению синусов углов KBA и KBC соответственно, то есть синусов углов C и A треугольника ABC, учитывая теорему об угле между касательной и хордой.

Используя теорему синусов и расположение точек, получим, что ориентированные расстояния от точки K до сторон BC, AC и AB треугольника относятся как $-a : b : c$, то есть равны $-\frac{a}{k_1}$, $\frac{b}{k_1}$, $\frac{c}{k_1}$.

А расстояния от середины EF до AC и AB относятся как синусы углов AFE и AEF, то есть как $AE : AF = (a+c) : (a+b)$.

Поскольку для любой точки прямой EF расстояние до BC равно сумме расстояний до двух других сторон, то расстояния от G до сторон равны $\frac{2a+b+c}{k_2}$, $\frac{a+c}{k_2}$ и $\frac{a+b}{k_2}$. Разделив отрезок GK в отношении $k_1 : k_2$ (считая от точки G), получим точку, равноудаленную от всех сторон, то есть I.

Комментарии.

1. Указанный факт можно доказать, используя формулу для расстояний из начала решения, предварительно показав, что данное условие выполняется для точек E и F. Также можно использовать площади треугольников.

2. При рассмотрении расстояний от точки K до прямых AB и AC можно использовать более общий факт. **Расстояния от точки, лежащей на симедиане треугольника, проведенной из вершины A, до сторон AB и AC треугольника прямо пропорциональны этим сторонам.**

В данном случае, точка K лежит на указанной симедиане по основному свойству симедианы.

Второй способ. Заметим, что достаточно будет доказать равенство: $\frac{\sin\angle BIK}{\sin\angle KIC} = \frac{\sin\angle FIG}{\sin\angle GIE}$.

Используя теорему синусов для треугольников BIK и KIC, получим: $\frac{\sin\angle BIK}{\sin\angle KIC} = \frac{\sin\angle KBI}{\sin\angle KCI}$.

Поскольку $\angle KBI = \angle KBC + \angle CBI = \angle BAC + \angle ABF = \angle BFC$ и, аналогично, $\angle KCI = \angle BEC$, то данное отношение можно заменить на отношение $\frac{\sin\angle BFC}{\sin\angle BEC}$. Применив теперь теорему синусов для треугольников BEC и BFC, получим: $\frac{\sin\angle BFC}{\sin\angle BEC} = \frac{BE/BC\cdot\sin 0{,}5B}{CF/BC\cdot\sin 0{,}5C} = \frac{IE}{IC}\cdot\frac{BI}{IF}\cdot\frac{\sin 0{,}5B}{\sin 0{,}5C} = \frac{IE}{IF}$, также используя теорему синусов для треугольника BIC и свойство биссектрисы. Осталось воспользоваться теоремой синусов для треугольников FIG и GIE.

Третий способ. Пусть биссектрисы BF и CE пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, в точках B_1 и C_1 соответственно, T — точка пересечения касательных, проведенных в точках B_1 и C_1, X — точка пересечения прямых B_1C_1 и BC (см. рис. 10–11.6б).

Воспользуемся следующим фактом (частный случай теоремы Брианшона).

В описанном четырехугольнике точка пересечения отрезков, соединяющих точки касания противоположных сторон, совпадает с точкой пересечении его диагоналей.

В данном случае T, I и K лежат на одной прямой.

Для дальнейшего нам потребуется вспомнить понятие поляры.

Пусть фиксирована точка O и окружность с центром O радиуса R. Для каждой точки X, отличной от O, на луче OX строим точку X такую, что $OX \cdot OX' = R^2$. Через точку X' проведем прямую x, перпендикулярную OX'. Прямая x называется *полярой* точки X, а точка X — *полюсом* прямой x.

Также будем использовать двойные отношения четырех точек, лежащих на одной прямой, и двойные отношения четырех прямых, проходящих через одну точку. Напомним, что двойным отношением $(ABCD)$ точек A, B, C и D называется $\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}\right)$. Это же отношение равно двойному отношению прямых, проходящих через эти точки и пересекающихся в одной точке.

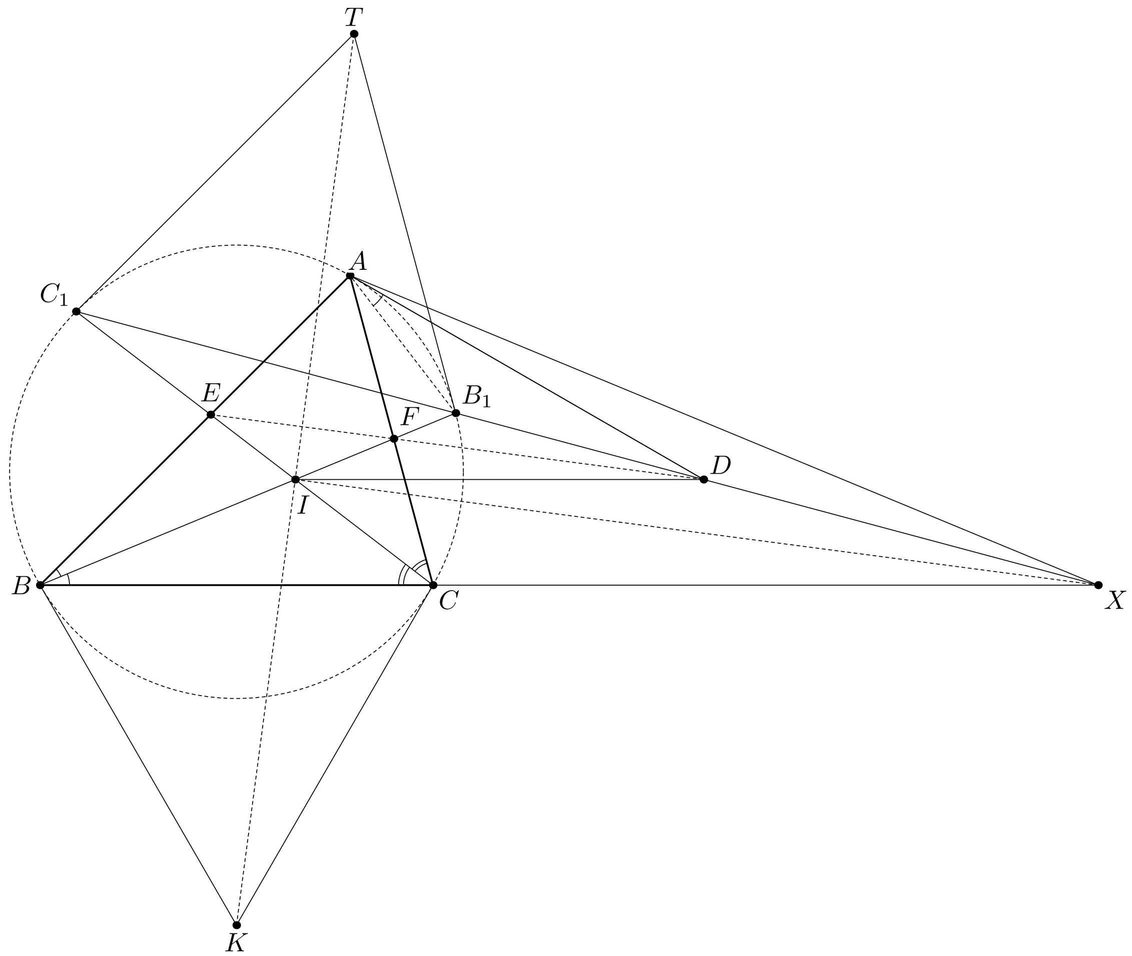


Рис. 10–11.6б

Воспользуемся двумя фактами.

1. Концы отрезка, его середина, а также бесконечно удаленная точка прямой, содержащей отрезок, образуют гармоническую четверку, то есть их двойное отношение равно -1.

2. Пусть прямая, проходящая через точку X, пересекает окружность в точках Y и Z. Тогда поляра точки X относительно этой окружности пересечет эту прямую в точке, которая образует с точками X, Y и Z гармоническую четверку.

Так как B_1C_1 — поляра точки T, а BC — поляра точки K, то X (точка пересечения B_1C_1 и BC) является полюсом прямой TK, то есть TK — поляра точки X.

Рассмотрим прямые IC_1, IB_1, IT и IX.

Поскольку IT — поляра точки X, то точки их пересечения с прямой B_1C_1 образуют гармоническую четверку точек, а указанные прямые, в свою очередь, образуют гармоническую четверку прямых.

Тогда пересечение этих прямых с прямой EF также образуют гармоническую четверку точек. Следовательно, условие, что точка G (середина EF) является пересечением IT и EF равносильно тому, что прямые IX и EF пересекаются в бесконечно удаленной точке.

То есть достаточно доказать, что прямые IX и EF параллельны.

Пусть касательная к окружности, проведенная в точке A, пересекает прямую B_1C_1 в точке D.

Докажем, что:

1) D, E и F лежат на одной прямой.

2) прямые DI и BC параллельны.

Из указанных выше утверждений и будет следовать искомое.

Действительно, для параллельности IX и FD достаточно, чтобы $\frac{B_1D}{B_1X} = \frac{B_1F}{B_1I}$.

Но $\frac{B_1D}{B_1X} = \frac{B_1I}{B_1B}$ из параллельности DI и BC. Кроме того, $\frac{B_1I}{B_1B} = \frac{B_1F}{B_1I}$ из леммы о трезубце и подобия треугольников B_1CF и B_1BC.

Докажем первое утверждение.

Воспользуемся теоремой Паскаля:

Если вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат на окружности, то точки пересечения прямых, содержащих противоположные звенья ломаной, лежат на одной прямой.

Рассмотрим теорему Паскаля для вписанной в окружность ломаной C_1CABB_1, в которой две вершины A совпали. Точки пересечения CC_1 и AB, BB_1 и AC, а также B_1C_1 и касательной, проведенной в точке A, лежат на одной прямой.

Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что:

А) точки A и I симметричны относительно прямой B_1C_1 по лемме о трезубце.

Б) $\angle DAB_1 = \angle ABB_1 = \angle CBB_1$, используя угол между касательной и хордой.

Тогда $\angle DIB_1 = \angle DAB_1 = \angle CBB_1$, откуда и следует искомая параллельность.

Комментарии.

1. Про теоремы Паскаля и Брианшона можно прочитать, например, здесь: В.В. Прасолов «*Задачи по планиметрии*», глава 6.

2. Подробнее о полярном соответствии см., например, Я. П. Понарин «*Элементарная геометрия*», том 1 «*Планиметрия*».

3. Про гармонические четверки и двойные отношения можно прочитать, например, здесь: В.В. Прасолов «*Задачи по планиметрии*», глава 30.

4. Утверждение 1 можно найти в книжке А. В. Акопяна «*Геометрия в картинках*», второе издание, задача 4.3.7.

Утверждение 2 предлагалось участникам регионального этапа Всероссийской олимпиады по математике в 2006-м году.

5. Также утверждение задачи следует из равенства площадей треугольников KIE и KIF. Это дает еще один способ решения задачи.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, Г. Галяпин, А. Горская, А. Заславский, Я. Щербатов.