

Решения задач

8–9 класс

1. (Т. Праведников, 10 класс) В параллелограмме $ABCD$ проведен перпендикуляр DX к диагонали AC . Докажите, что середина отрезка BX равноудалена от A и C .

Решение. Первый способ. Пусть K — середина BX , O — точка пересечения диагоналей параллелограмма (см. рис. 8-9.1а). Докажем, что K лежит на серединном перпендикуляре к диагонали AC , откуда и будет следовать утверждение задачи. Поскольку O — середина BD , то OK — средняя линия треугольника DBX . Следовательно, прямая OK параллельна DX , то есть перпендикулярна AC . Осталось заметить, что O также является серединой отрезка AC , то есть прямая OK является серединным перпендикуляром к отрезку AC , что и требовалось.

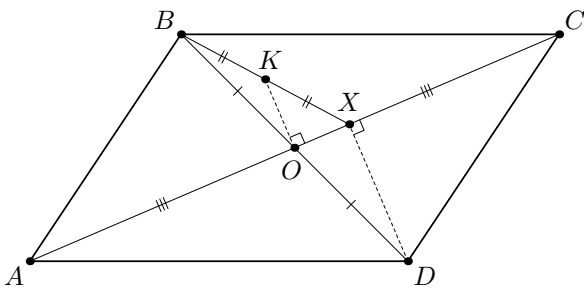


Рис. 8–9.1а

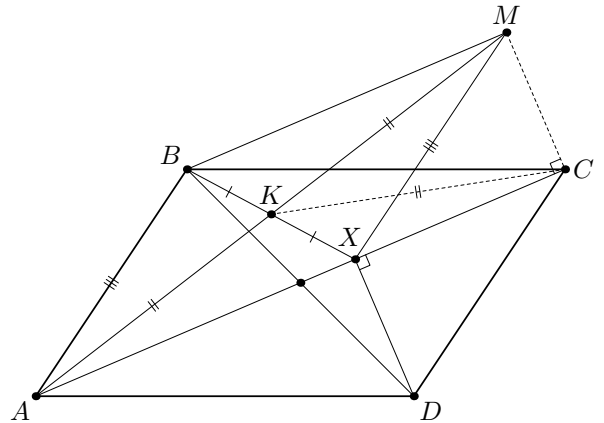


Рис. 8–9.16

Второй способ. Продлим медиану AK треугольника ABX на свою длину, то есть построим треугольник ABX до параллелограмма $ABMX$ (см. рис. 8-9.16). Тогда отрезки MX и AB равны и параллельны. Учитывая равенство и параллельность отрезков AB и CD , получим, что отрезки MX и CD также равны и параллельны, то есть $MCDX$ — параллелограмм. Следовательно, прямые CM и DX параллельны и $\angle MCA = 90^\circ$, то есть треугольник MCA — прямоугольный с гипотенузой AM . Осталось воспользоваться свойством медианы прямоугольного треугольника: $CK = 0,5AM = AK$.

Комментарий.

Также можно было опустить перпендикуляр BY на диагональ AC и доказать, что O — середина отрезка XY . Это, в свою очередь, можно получить, например, из равенства треугольников ABY и CDX .

2. (Ю. Блинков) К окружности с центром O проведены касательные PA и PB (A и B — точки касания). На отрезках AB и PB взяли точки M и K соответственно, так, что M — середина отрезка OK . Докажите, что точки A, M, K и P лежат на одной окружности.

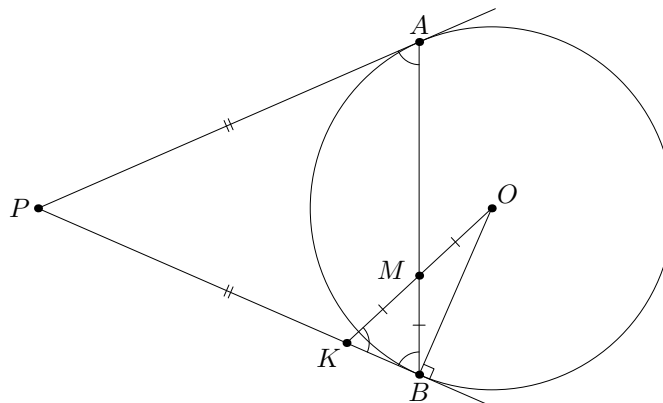


Рис. 8–9.2

Решение. Докажем, что $\angle MKP + \angle MAP = 180^\circ$, откуда и будет следовать утверждение задачи (см. рис. 8-9.2).

Проведем радиус OB . Поскольку PB касательная, то $\angle OBP = 90^\circ$, то есть треугольник OBK — прямоугольный. Следовательно, $BM = 0,5OK = MK$, откуда $\angle MKB = \angle MBK$. Кроме того, $PA = PB$ как отрезки касательных, то есть $\angle PBA = \angle PAB$. Тогда $\angle MKB = \angle MBK = \angle PBA = \angle PAB = \angle MAP$, откуда $\angle MKP + \angle MAP = 180^\circ$, что и требовалось.

3. (Д. Крохалев) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE и CF . Точка K — проекция точки пересечения медиан треугольника на сторону BC . Докажите, что $FK + EK \leq BC$.

Решение. Пусть AM — медиана, а AH — высота треугольника ABC . Заметим, что $EM = FM = 0,5BC$ как медианы прямоугольных треугольников. Если $AB = AC$, то точки K и M совпадают и неравенство обращается в равенство. Предположим, что $AB \neq AC$. Тогда точка K лежит между точками M и H (см. рис. 8-9.3). Кроме того, высоты треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника, то есть $\angle FHB = \angle EHC$.

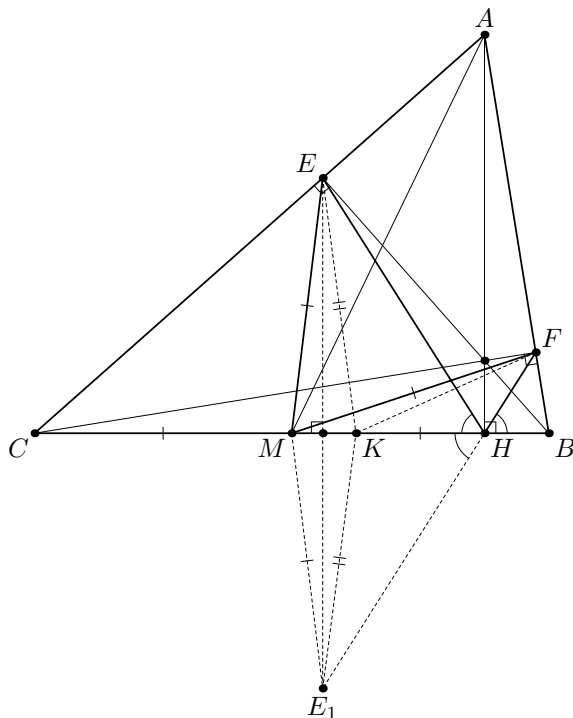


Рис. 8-9.3

Пусть E_1 — образ точки E при симметрии относительно прямой BC . Тогда точки E_1 , H и F лежат на одной прямой. Кроме того, $E_1M = EM$ и $E_1K = EK$ в силу симметрии. Рассмотрим треугольник FME_1 . Точка K — внутри него, так как она лежит между точками M и H . Используя "неравенство резинки" получим: $FK + EK = FK + E_1K < FM + E_1M = FM + EM = BC$, что и требовалось.

Комментарий.

1. Равенство $\angle FHB = \angle EHC$ можно получить из того, что четырехугольники $AENB$ и $AFHC$ вписанные. Тогда указанные углы равны углу A треугольника ABC .

2. Отметим, что утверждение задачи верно для любой точки, лежащей на медиане AM .

4. (Т. Праведников, 10 класс) Высоты CC' и BB' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр описанной окружности, точка A_1 симметрична H относительно стороны BC . Точка C_1 на CC' такова, что $OC' = OC_1$, аналогично определена точка B_1 . Докажите, что точки C_1 , B_1 , A_1 и H лежат на одной окружности.

Решение. Проведем диаметр AP . Докажем, что точки C_1 , B_1 , A_1 и H лежат на окружности с диаметром PH .

Воспользуемся следующим свойством ортоцентра треугольника:

Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

Вернемся к решению.

Из указанного свойства следует, что точка A_1 лежит на окружности, описанной около треугольника ABC , то есть $\angle HA_1P = \angle AA_1P = 90^\circ$. Следовательно, точка A_1 лежит на окружности с диаметром PH .

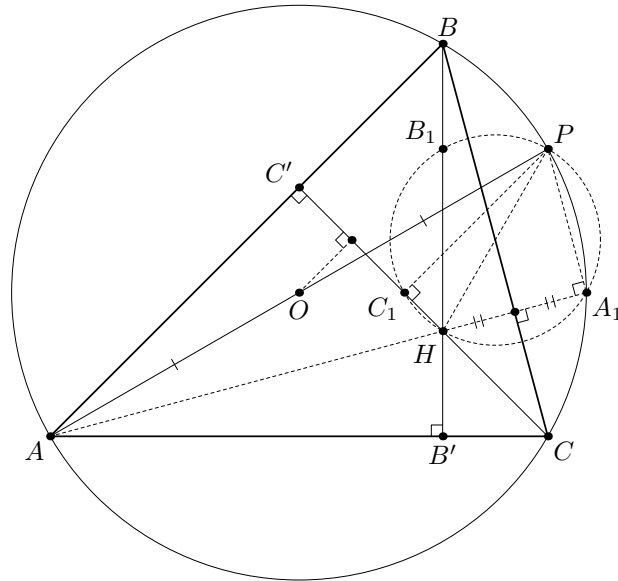


Рис. 8–9.4

Докажем, что точка C_1 также лежит на этой окружности (для точки B_1 доказательство аналогично). Рассмотрим точку X — проекцию P на прямую CC' . Поскольку проекцией точки A на эту прямую является точка C' , то проекция O — середины AP — является серединой $C'X$ по теореме Фалеса. С другой стороны, $OC' = OC_1$, то есть O проектируется в середину $C'C_1$. Следовательно, точки C_1 и X совпадают и $\angle HC_1P = 90^\circ$, то есть точка C_1 также лежит на окружности с диаметром PH , что и требовалось.

Комментарий.

Используемое свойство ортоцентра следует из равенства углов BA_1C и BHC и признака вписанного четырехугольника.

5. (Д. Прокопенко) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Точки C и D движутся по дуге AB окружности ω_1 так, что точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD и $CD = 1$. Отрезки AC и BD пересекают окружность ω_2 в точках N и M соответственно. Прямые BN и AM пересекают соответственно прямые AD и BC в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ касается фиксированной окружности.

Решение. Докажем, что длина отрезка PQ постоянна, а точки A, P, Q и B лежат на фиксированной окружности, откуда и будет следовать утверждение задачи. Действительно, хорды равной длины одинаково удалены от центра, то есть отрезок PQ будет касаться окружности с фиксированным центром O (центром окружности, на которой лежат указанные четыре точки) и радиусом, равным расстоянию от центра O до хорды PQ .

Заметим, что $\angle DAC = \angle DBC$, а $\angle ANB = \angle AMB$, как опирающиеся на одну дугу (см. рис. 8–9.5).

Тогда $\angle APB = \angle ANB - \angle DAC = \angle AMB - \angle DBC = \angle AQB$, то есть точки A, P, Q и B лежат на одной окружности.

Кроме того, $\angle DAC$ и $\angle ANB$ фиксированы, поскольку опираются на фиксированные дуги. Следовательно,

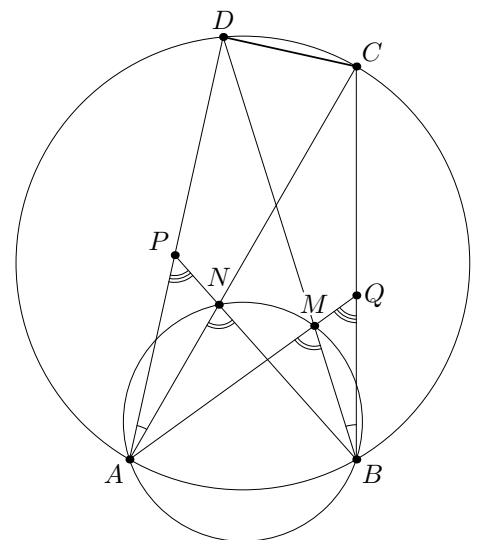


Рис. 8–9.5

$\angle APB$ также фиксирован, то есть точки A, P, Q и B лежат на окружности фиксированного радиуса.

Осталось показать, что длина хорды PQ фиксирована, то есть фиксирован, например, угол PBQ .

Заметим, что $\angle PBQ = \angle PBD + \angle DBQ = \angle APB - \angle ADB + \angle DBC$, где $\angle APB, \angle ADB$ и $\angle DBC$ — фиксированы, поскольку опираются на фиксированные дуги. Следовательно, угол PBQ фиксирован, то есть фиксирована длина хорды PQ , что и требовалось.

Комментарий.

Решение можно было записать, используя, что угол между хордами (секущими) равен полусумме (полуразности) дуг, которые они высекают на окружности.

6. (Ю. Блинков) Нарисован неравносторонний треугольник ABC , описанная около него окружность и ее центр O . Также отмечен центр I вписанной окружности. Пользуясь только линейкой (без делений) постройте точку касания стороны AB с вписанной окружностью, проведя не более четырех линий.

Решение. Пусть K — искомая точка касания, W — середина дуги AB описанной окружности, не содержащей точку C , S — точка пересечения WK с окружностью (см. рис. 8.9.6).

Докажем, что $\angle ISC = 90^\circ$.

Для этого достаточно доказать, что:

1) $\angle SKB = \angle WCS$; 2) $\angle WIK = \angle WSI$.

Действительно, поскольку треугольники WCS и WKI имеют общий угол, то $\angle WIK + \angle WKI = \angle WCS + \angle WSC$. Учитывая, что $\angle AKI = 90^\circ$, получим требуемое.

Докажем первое утверждение. Заметим, что $\angle SKB = 0,5(\smile AW + \smile SB) = 0,5 \smile SW = \angle WCS$, учитывая, что W — середина дуги.

Теперь докажем второе утверждение. Для этого докажем, что треугольники WIK и WSI подобны, что, в свою очередь, будет следовать из равенства $WI^2 = WK \cdot WS$, поскольку угол W у них общий. Так как $WI = WB$ по лемме о трезубце, то достаточно доказать равенство $WB^2 = WK \cdot WS$, то есть подобие треугольников WBK и WSB . Это, в свою очередь, следует из равенства углов: $\angle BSW = \angle ASW = \angle ABW = \angle KBW$, поскольку угол W у них общий.

Итак, $\angle ISC = 90^\circ$, то есть прямая SI содержит точку D , диаметрально противоположную точке C .

Отсюда вытекает способ построения.

1. Проводим диаметр CO и получаем точку D .
2. Проводим прямую DI и получаем точку S .
3. Проводим биссектрису CI и получаем точку W .
4. Проводим прямую WS .

Пересечение AB и WS — искомая точка K .

Комментарии.

1. Оба вспомогательных утверждения можно было доказывать, используя степень точки относительно окружности.

2. Утверждение, что $\angle ISC = 90^\circ$, можно найти, например, в книге А. В. Акопяна «Геометрия в картинках», номер 4.6.9.

Материалы подготовили: Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский.

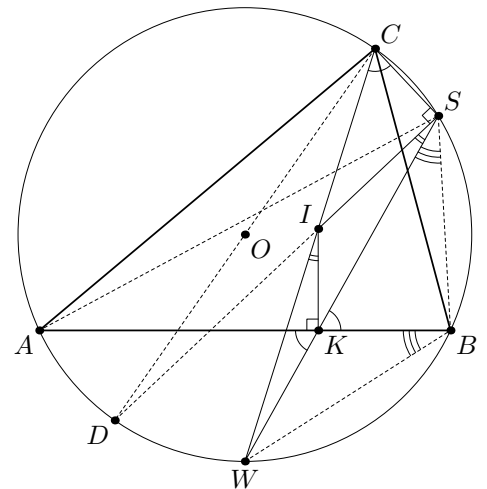


Рис. 8–9.6

Решения задач

10–11 класс

1. (М. Волчкевич) Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 полностью накрыли двумя равными кругами. Какой наименьший диаметр может быть у этих кругов?

Ответ: $\frac{25}{8}$.

Решение. Заметим, что данный треугольник ABC является прямоугольным. Пусть $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, M — середина AB ; серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает отрезок BC в точке K (см. рис. 10–11.1). Тогда $BK = AK = AB \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{25}{8}$ из подобия треугольников KMB и ACB .

Заметим, что окружности с диаметрами AK и BK полностью покрывают треугольник ABC .

Покажем, что меньшим диаметром накрыть треугольник не получится.

Заметим, что один из кругов должен покрыть вершину B . Если взять диаметр, меньший, чем BK , то он не покрывает точку K . Кроме того, он не покрывает точку A , поскольку $AB > BK$.

Поскольку точки A и K кругом диаметра меньше, чем AK , одновременно накрыть нельзя, то часть треугольника останется непокрытой.

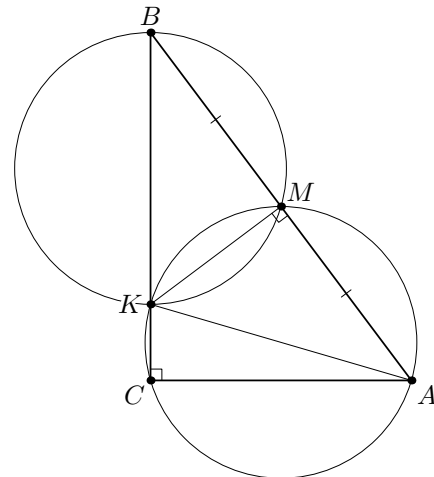


Рис. 10–11.1

2. (Г. Филипповский) Нарисован треугольник ABC с отмеченным центром I вписанной окружности и описанной около него окружностью. Пользуясь только линейкой, и проведя не более четырех линий, постройте прямую, параллельную стороне AB треугольника ABC .

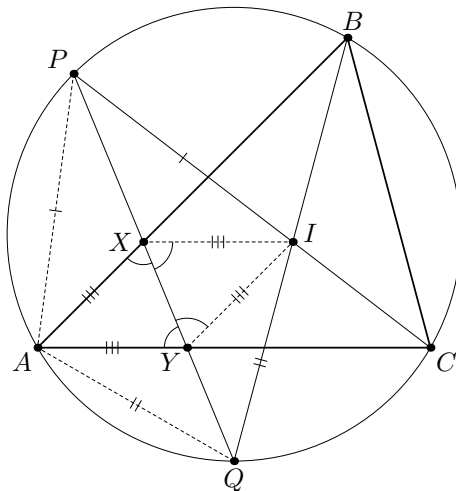


Рис. 10–11.2

Решение. Пусть лучи CI и BI пересекают окружность в точках P и Q , а отрезок PQ пересекает стороны AB и AC — в точках X и Y соответственно (см. рис. 10–11.2). Докажем, что $AXIY$ — ромб.

Заметим, что $\angle AXI = 0,5(\sphericalangle AQP + \sphericalangle APB) = 0,5(\sphericalangle CQP + \sphericalangle AP) = \angle AIX$, то есть треугольник AXI — равнобедренный. Кроме того, $PA = PI$, а $QA = QI$ по лемме о трезубце, то есть точки A и I симметричны относительно прямой XI . Следовательно, $AXIY$ — ромб и прямая IY параллельна AB .

Отсюда вытекает способ построения:

1 — строим точки P и Q (1-я и 2-я линии);

2 — проводим PQ и получаем точку Y (3-я линия);

3 — проводим IY (4-я линия).

Прямая IY — искомая.

3. (*Ф. Нилов*) Дан пространственный четырехугольник $ABCD$, стороны которого касаются сферы в точках K, L, M и N . Докажите, что середины отрезков AC и BD , центр сферы и центр окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$, лежат в одной плоскости.

Решение. Докажем, что указанные точки лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости $KLMN$. Для этого достаточно показать, что ортогональные проекции этих точек на плоскость $KLMN$ лежат на одной прямой.

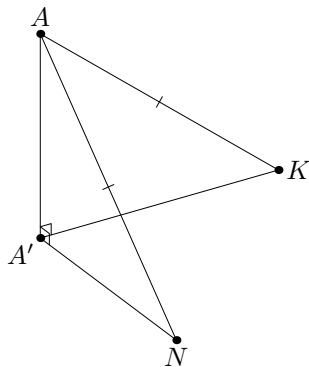


Рис. 10–11.3а

Пусть O — центр сферы, O_1 — центр указанной окружности Ω . Рассмотрим ортогональную проекцию на плоскость $KLMN$, то есть проекцию в направлении прямой OO_1 . Точки O и O_1 перейдут в одну точку O_1 , окружность Ω перейдет в себя, а четырехугольник $ABCD$ — в четырехугольник $A'B'C'D'$. Кроме того, середины P и Q диагоналей AC и BD перейдут в середины P' и Q' диагоналей $A'C'$ и $B'D'$ соответственно.

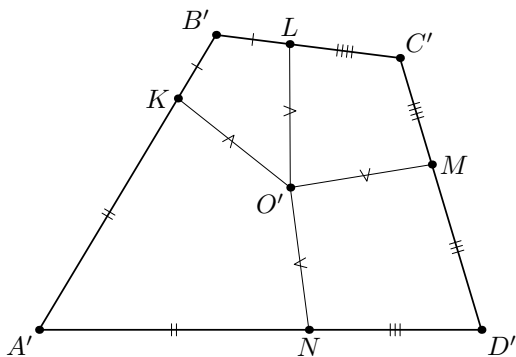


Рис. 10–11.3б

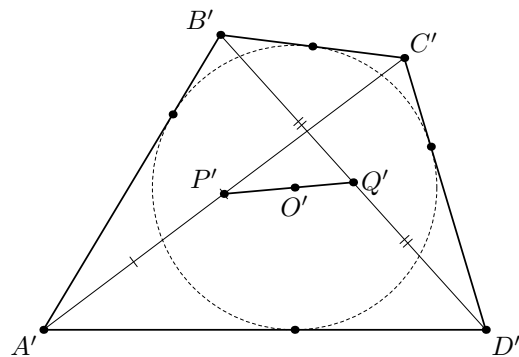


Рис. 10–11.3в

Докажем, что четырехугольник $A'B'C'D'$ описан около окружности с центром в точке O_1 . Пусть K и N — точки касания сферы со сторонами AB и AD соответственно. Поскольку $AK = AN$ (отрезки касательных), то $A'K = A'N$, используя свойство наклонных и проекций (см. рис. 10–11.3а). Аналогично, $B'K = B'L$, $C'L = C'M$, $D'M = D'N$ (см. рис. 10–11.3б). Следовательно, четырехугольник $A'B'C'D'$ описанный, так как суммы его противоположных сторон равны. Кроме того, O_1 является центром окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$, то есть лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам. Осталось заметить, что биссектрисы углов четырехугольника $A'B'C'D'$ лежат на этих серединных перпендикулярах, то есть O_1 совпадает с центром вписанной окружности четырехугольника $A'B'C'D'$.

По теореме Ньютона в описанном четырехугольнике центр вписанной окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей (см. рис. 10–11.3в), то есть образы точек O, O_1, P и Q лежат на одной прямой, что и требовалось.

Комментарии.

1. То, что точки K, L, M и N лежат в одной плоскости (а, как следствие, на одной окружности) можно доказать, например, используя отрезки касательных и теорему Менелая.

2. Точки K, L, M и N не обязательно являются точками касания окружности, вписанной в четырехугольник $A'B'C'D'$. В решении нам важно лишь то, что O_1 равноудалена от этих точек.

3. Задачу можно рассматривать как пространственный аналог теоремы Ньютона.

4. (Ю. Блинков) Даны точки A и B . Точка C движется по фиксированной окружности с хордой AB . Прямые, содержащие высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC , пересекаются в точке H . Прямые, содержащие медианы треугольников A_1CB_1 и AHB , проведенные из вершин C и H соответственно, пересекаются в точке Q . Найдите ГМТ Q .

Ответ: окружность с шестью выколотыми точками, полученная из данной окружности композицией симметрии относительно прямой AB и гомотетии с центром в середине отрезка AB и коэффициентом $k = \frac{\sin^2 C}{2 - \sin^2 C}$.

Решение. Пусть O — центр окружности, K — середина A_1B_1 , M — середина AB . Заметим, что точка M неподвижна, а точка H также движется по фиксированной окружности. Действительно, окружность, описанная около треугольника AHB , симметрична окружности, описанной около треугольника ACB относительно прямой AB .

Докажем, что отношение $MQ : QH$ не зависит от положения точки C . Это можно сделать различными способами.

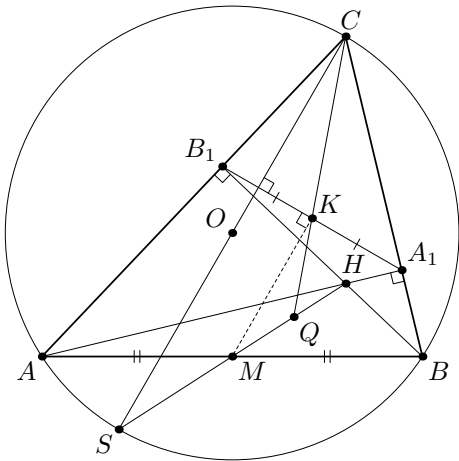


Рис. 10–11.4а

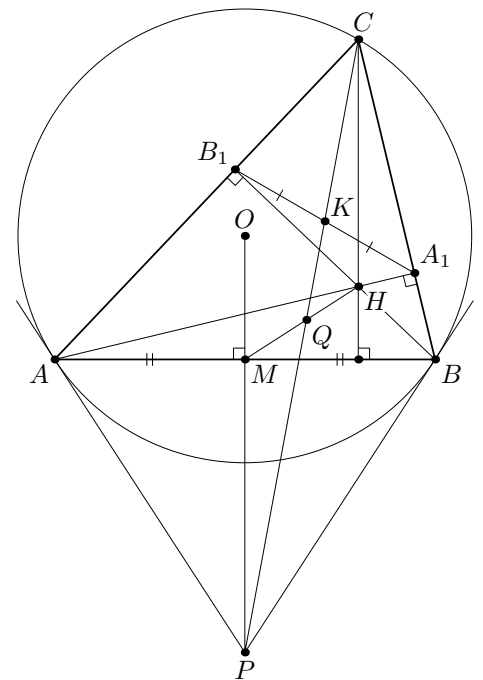


Рис. 10–11.4б

Первый способ. Заметим, что точка M удалена от точек A_1 и B_1 на фиксированное расстояние, равное $0,5AB$, то есть MK — серединный перпендикуляр к отрезку A_1B_1 . Кроме того, $A_1B_1 = AB \cdot |\cos \angle C|$, то есть по теореме Пифагора длина отрезка MK не зависит от положения точки C .

Далее используем, что:

- 1) точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин сторон, лежат на описанной окружности треугольника и диаметрально противоположны его вершинам;
- 2) радиус, проведенный в вершину треугольника, перпендикулярен стороне ортоугольника.

Пусть S — точка, симметричная H относительно точки M . Тогда C, O и S лежат на одной прямой. Кроме того, прямая CO перпендикулярна A_1B_1 , то есть параллельна MK . Следовательно, $QM : QS = MK : CS$, как соответствующие элементы подобных треугольников. Осталось заметить, что $QS = QM + MS = QM + MH$, то есть отношение $MQ : QH$ не зависит от положения точки C .

Второй способ. Воспользуемся тем, что $CH = 2OM$, то есть расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше, чем от центра описанной окружности до середины противоположной стороны.

Кроме того, используем основное свойство симедианы (прямая, симметричная медиане треугольника относительно биссектрисы).

Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках A и B , пересекаются в точке P . Тогда прямая CP содержит симедиану треугольника ABC .

Поскольку треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC , то медиана CK треугольника A_1B_1C является симедианой треугольника ABC , то есть проходит через фиксированную точку P — пересечения касательных к окружности, описанной около треугольника ABC , проведенных в точках A и B (см. рис. 10–11.4б).

Заметим, что треугольники PQM и CQH подобны, то есть $MQ : QH = MP : CH$.

Кроме того, $CH = 2OM$, а точки M и P не зависят от положения точки C , то есть длины отрезков CH и MP фиксированы, откуда и следует искомое.

Вернемся к решению. Поскольку точка H движется по фиксированной окружности, то точка Q движется по образу этой окружности при гомотетии с центром M и коэффициентом $MQ : MH = MK : (2R - MK) = \frac{0,5a \sin C}{2R - 0,5a \sin C} = \frac{\sin^2 C}{2 - \sin^2 C}$, используя, что $\sin \angle MB_1K = \sin \angle C$ и следствие из теоремы синусов.

Кроме того, если точка C «пробегает» описанную окружность треугольника ABC (исключая точки A и B), то ГМТ ортоцентров H — окружность, симметричная описанной окружности, за исключением точек, диаметрально противоположных A и B .

Также из условия следует, что точка H не может совпадать с точками A и B , так как в противном случае не существует треугольника AHB . И, наконец, если точка C является серединой одной из дуг AB окружности, то прямые, содержащие медианы, совпадают, что также не удовлетворяет условию.

Поскольку точка Q является образом точки H при гомотетии, то искомое ГМТ — окружность с шестью соответствующими выколотыми точками, полученная из данной окружности композицией симметрии относительно прямой AB и гомотетии с центром в точке M и коэффициентом $k = \frac{\sin^2 C}{2 - \sin^2 C}$.

Комментарий.

1. Указанную в ГМТ окружность можно было получить из описанной окружности треугольника ABC , используя гомотетию с центром в точке P .

2. О свойствах симедианы можно прочитать здесь:

https://geometry.ru/articles/symmedian_blinkov.pdf.

5. (Я. Щербатов) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D ; O и I — центры описанной и вписанной окружности соответственно. Точка X лежит на отрезке AD , причем $AX : XD = 2 : 1$. Докажите, что $\angle DIX + \angle AIO = 180^\circ$.

Решение. Докажем, что угол между векторами IA и IX равен углу между векторами OI и ID , откуда, учитывая расположение точек, и будет следовать утверждение задачи (см. рис. 10-11.5а).

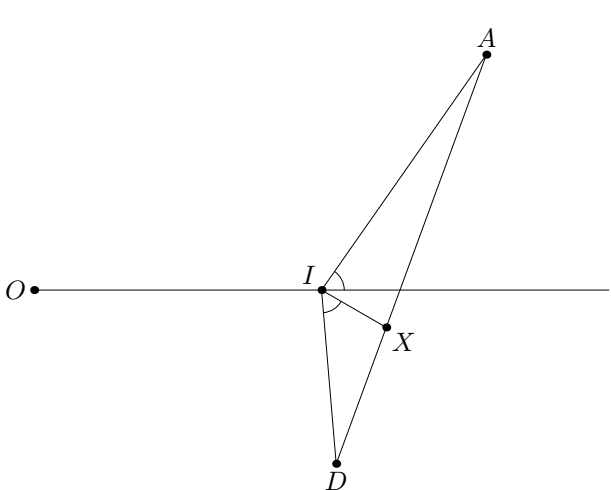


Рис. 10–11.5а

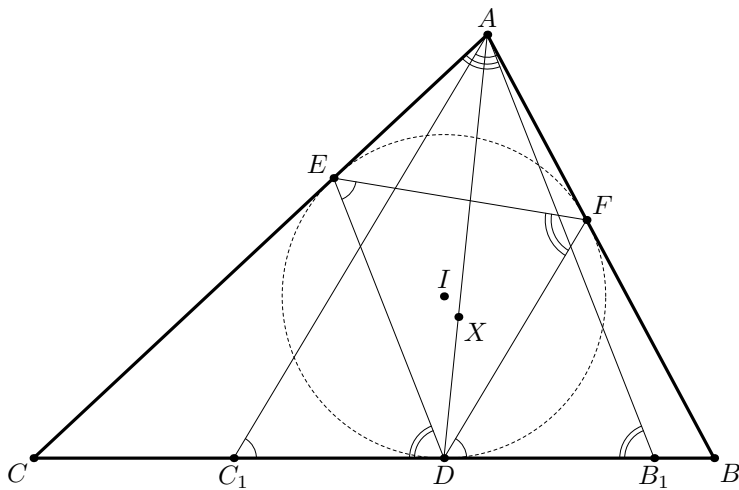


Рис. 10–11.5б

Пусть E и F — точки касания вписанной окружности со сторонами AC и AB соответственно, а точки C_1 и B_1 симметричны точке A относительно биссектрис углов B и C соответственно (см. рис. 10-11.5б).

Заметим, что достаточно будет доказать такие утверждения:

1) точка I — центр описанной окружности треугольника AB_1C_1 ;

2) треугольники DEF и AC_1B_1 подобны;

3) X — точка пересечения медиан треугольника AB_1C_1 ;

4) прямая OI является прямой Эйлера треугольника DEF , причем точка пересечения медиан и ортоцентр этого треугольника лежат на луче, дополнительном к лучу IO .

Действительно, из первого утверждения следует, что у треугольников AB_1C_1 и DEF совпадают центры описанных окружностей, тогда из третьего утверждения получим, что IX — прямая Эйлера треугольника AB_1C_1 . Тогда, в силу подобия треугольников (второе утверждение), угол между прямой Эйлера и радиусом описанной окружности, проведенным в соответствующие вершины, будет одинаков для обоих треугольников, то есть угол между векторами IA и IX равен углу между векторами OI и ID , в силу утверждения 4 и указанного в нем расположения точек.

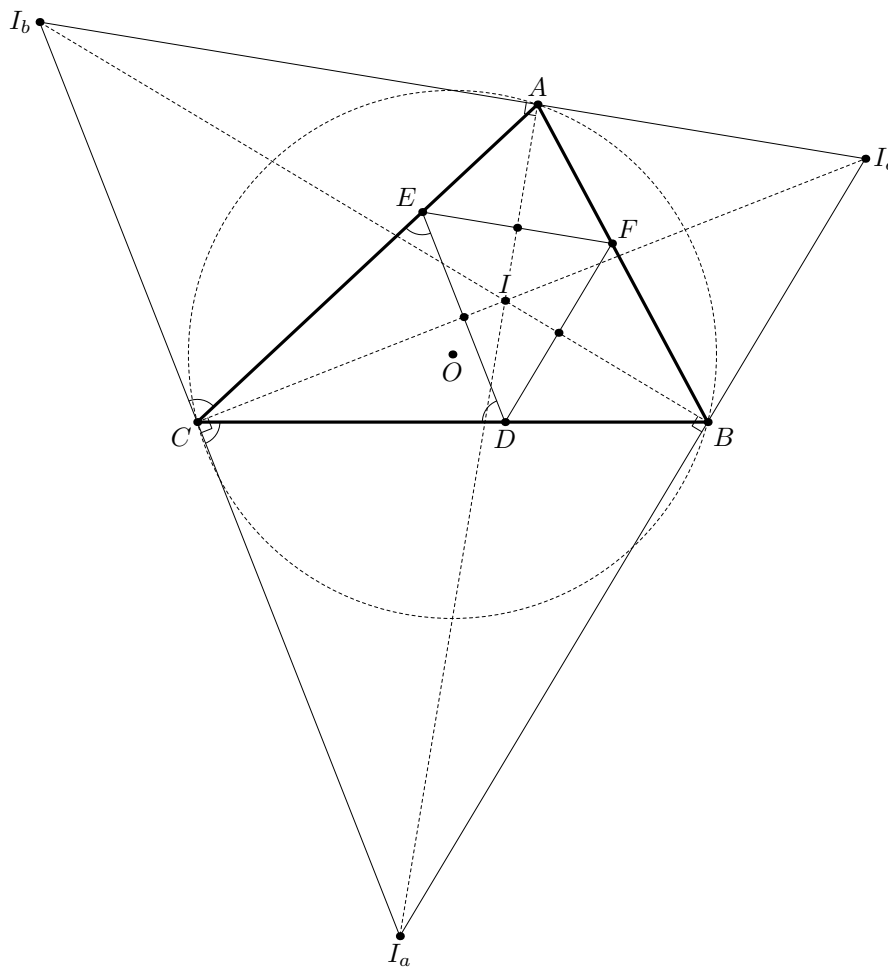


Рис. 10–11.5в

Докажем эти утверждения.

Поскольку точка C_1 симметрична A относительно биссектрисы угла B , то треугольник ABC_1 — равнобедренный, то есть серединный перпендикуляр к стороне AC_1 содержит биссектрису угла B , откуда и следует первое утверждение (для стороны AB_1 доказательство аналогично).

Кроме того, в силу симметрии, четырехугольники $AFDC_1$ и $AEDB_1$ — равнобокие трапеции. Учитывая равенство отрезков касательных, получим: $C_1D = AF = AE = B_1D$. То есть D — середина B_1C_1 , а X — точка пересечения медиан треугольника AB_1C_1 (третье утверждение).

И, наконец, $\angle AC_1B = \angle BDF = \angle DEF$, используя параллельность и угол между каса-

тельной и хордой. Аналогично, $\angle AB_1C = \angle DFE$, откуда и следует подобие, то есть второе утверждение.

Докажем четвертое утверждение.

Рассмотрим треугольник $I_a I_b I_c$, образованный центрами внеписанных окружностей треугольника ABC (см. рис. 10-11.5в). Заметим, что треугольник ABC является для него ортотреугольником, I — ортоцентром, а точка O — центром окружности девяти точек. Следовательно, OI — прямая Эйлера треугольника $I_a I_b I_c$, а центр описанной окружности этого треугольника лежит на луче, дополнительном к OI , поскольку симметричен ортоцентру относительно центра окружности девяти точек. Кроме того, стороны треугольника DEF параллельны сторонам треугольника $I_a I_b I_c$, то есть они переводятся друг в друга гомотетией. Поскольку центры описанной окружности обоих треугольников лежат на прямой OI (I — центр описанной окружности треугольника DEF), то и центр указанной гомотетии также лежит на этой прямой, причем на луче, дополнительном к IO (поскольку коэффициент гомотетии положительный). Следовательно, прямая OI переходит в себя, то есть эта прямая является прямой Эйлера и для треугольника DEF , а точка пересечения медиан и ортоцентр треугольника DEF лежат на луче, дополнительном к IO .

Итак, $\angle AIX = 180^\circ - \angle OID$, откуда и следует, что $\angle DIX + \angle AIO = 180^\circ$.

6. (Д. Швецов, Ф. Бахарев) В треугольнике ABC угол B равен 60° , O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности, I_b — центр внеписанной окружности, касающейся стороны AC . Прямая OI пересекает прямые AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямая OI_b — в точках C_2 и A_2 соответственно. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке B_1 , а прямые AA_2 и CC_2 — в точке B_2 . Докажите, что середина отрезка B_1B_2 равноудалена от A и C .

Решение. Докажем, что прямые IB_1 и $I_b B_2$ перпендикулярны AC , откуда и будет следовать утверждение задачи. Действительно, тогда указанные прямые будут проходить через точки касания со стороной AC вписанной и внеписанной окружности соответственно, то есть симметричны относительно серединного перпендикуляра к AC , на котором и будет лежать середина отрезка B_1B_2 .

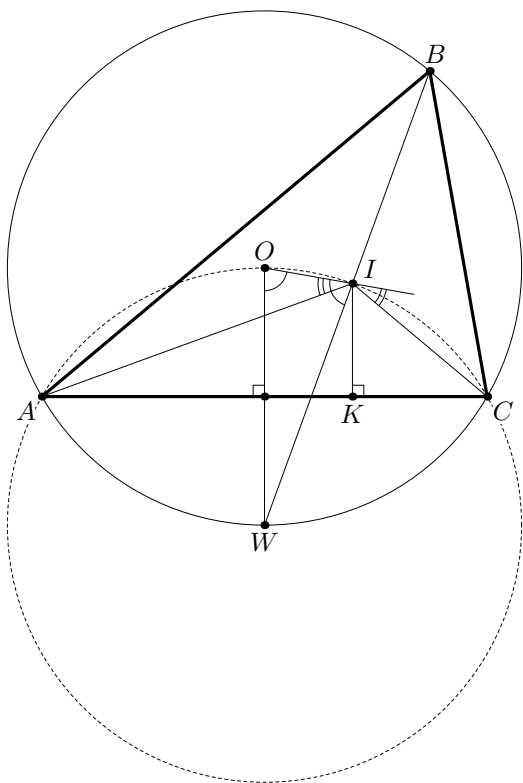


Рис. 10-11.6а

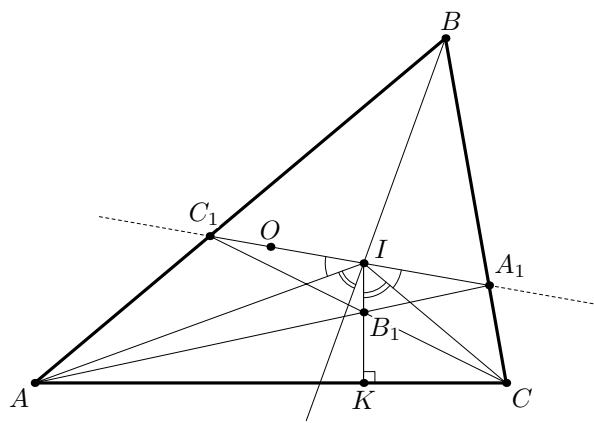


Рис. 10-11.66

Сначала докажем утверждение для вписанной окружности.

Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной AC .

Покажем, что, если угол B равен 60° , то прямая OI содержит биссектрису угла BIC и биссектрису внешнего угла AIC (см. рис. 10–11.6а).

Заметим, что $\angle AOC = \angle AIC = 120^\circ$, то есть точка O лежит на окружности, описанной около треугольника AIC . Поскольку $OA = OC$, то точка O лежит на биссектрисе внешнего угла AIC . Кроме того, по лемме о трезубце, центром указанной окружности является точка W — середина дуги AC . Следовательно, треугольник WOI — равнобедренный и $\angle WIO = \angle WOI$. Осталось заметить, что прямые OW и IK параллельны, откуда и следует искомое равенство углов.

Теперь покажем, что на прямой IK лежит точка B_1 , то есть точка B пересечения прямых AC_1 и CA_1 и точка B_1 пересечения прямых AA_1 и CC_1 лежат на прямой, которые образуют одинаковый угол с прямой OI (см. рис. 10–11.6б). Для этого воспользуемся теоремой об изогоналях:

Теорема. Пусть OB и OC изогонали угла AOD . Прямые AC и BD пересекаются в точке Q , а прямые AB и CD — в точке P . Тогда OP и OQ — также изогонали относительно угла AOD (см. рис. 10–11.6в).

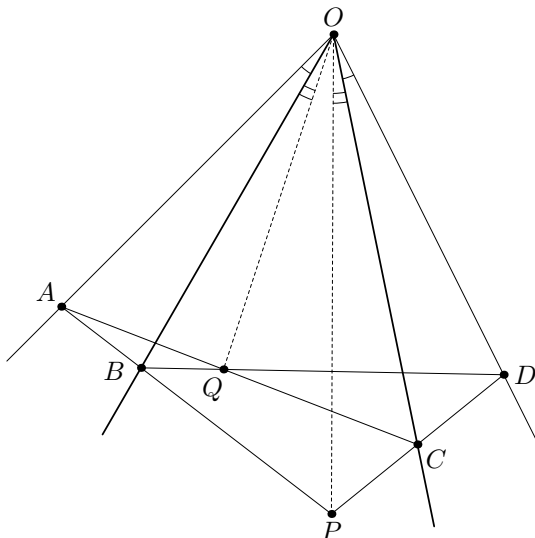


Рис. 10–11.6в

Отметим, что:

1) теорема справедлива и для случая внешних изогоналей (то есть точки P и Q могут лежать и вне угла AOD);

2) если лучи OP и OQ (или OB и OC) совпадают, то этот луч является биссектрисой угла AOD).

В нашем случае точки A и C лежат на сторонах угла AIC , а IA_1 и IC_1 — внешние изогонали для этого угла. Тогда точка B пересечения прямых AC_1 и CA_1 и точка B_1 пересечения прямых AA_1 и CC_1 также лежат на изогоналях этого угла, что и требовалось.

Теперь докажем аналогичное утверждение для вневписанной окружности. Для этого докажем аналогичные вспомогательные утверждения.

Пусть M — точка касания вневписанной окружности со стороной AC (см. рис. 10–11.6г).

Покажем, что, если угол B равен 60° , то прямая OI_b содержит биссектрису угла BI_bM и биссектрису угла AI_bC .

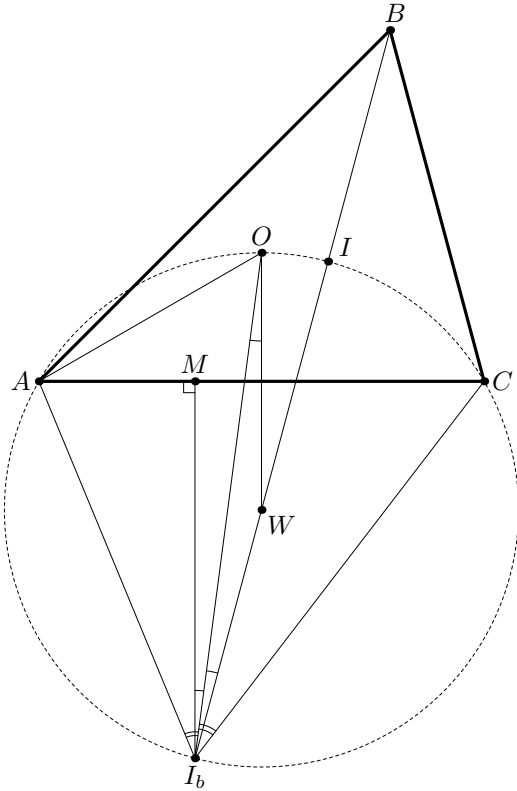


Рис. 10–11.6г

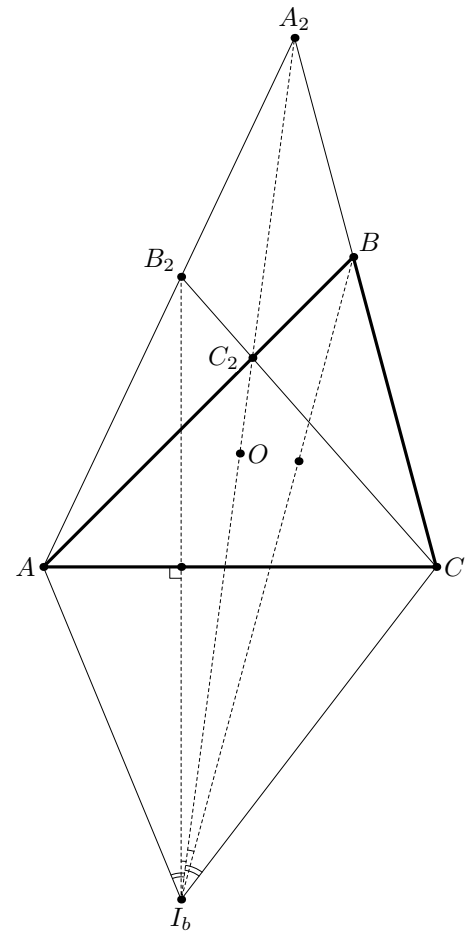


Рис. 10–11.6д

Заметим, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника AI_bC поскольку эта окружность совпадает с окружностью, описанной около треугольника AIC . Так как $OA = OC$, то точка O лежит на биссектрисе угла AI_bC . Кроме того, центром указанной окружности является точка W . Следовательно, треугольник WOI_b — равнобедренный и $\angle WI_bO = \angle WOI_b$. Осталось заметить, что прямые OW и I_bM параллельны.

Теперь покажем, что на прямой I_bM лежит точка B_2 , то есть точка B пересечения прямых AC_2 и CA_2 и точка B_2 пересечения прямых AA_2 и CC_2 лежат на прямой, которые образуют одинаковый угол с прямой OI_b . Для этого воспользуемся теоремой об изогоналях для угла AI_bC . Точки A и C лежат на его сторонах, а точки A_2 и C_2 — на биссектрисе, то есть I_bA_2 и I_bC_2 — изогонали для этого угла. Тогда точка B пересечения прямых AC_2 и CA_2 и точка B_2 пересечения прямых AA_2 и CC_2 также лежат на изогоналях этого угла, что и требовалось.

Комментарий.

Про теорему об изогоналях и ее применение можно прочитать, например, здесь: https://geometry.ru/articles/isogonal_theorem_kvant_04_05.pdf.

Материалы подготовили: Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, Я. Щербатов.