**VIII всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина**

**X устная олимпиада по геометрии**

**г. Москва, 8 апреля 2012 года**

## 8–9 класс

**1.** В трапеции $ABCD$ стороны $AD$ и $BC$ параллельны, и $AB = BC = BD$. Высота $BK$ пересекает диагональ $AC$ в точке $M$. Найдите $\angle CDM$.

**2.** На плоскости даны два равных многоугольника $F$ и $F'$. Известно, что вершины многоугольника $F$ принадлежат $F'$ (могут лежать внутри него или на границе). Верно ли, что все вершины этих многоугольников совпадают?

**3.** Дан равносторонний треугольник $ABC$ и прямая $l$, проходящая через его центр. Точки пересечения этой прямой со сторонами $AB$ и $BC$ отразили относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через получившиеся точки, касается вписанной окружности треугольника $ABC$.

**4.** В треугольнике $ABC$ точка $I$ — центр вписанной окружности, точки $I_A$ и $I_C$ — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон $BC$ и $AB$ соответственно. Точка $O$ — центр описанной окружности треугольника $II_AI_C$. Докажите, что $OI \perp AC$.

---

## 8–9 класс

**5.** Дана окружность и хорда $AB$, отличная от диаметра. По бо́льшей дуге $AB$ движется точка $C$. Окружность, проходящая через точки $A$, $C$ и точку $H$ пересечения высот треугольника $ABC$, повторно пересекает прямую $BC$ в точке $P$. Докажите, что прямая $PH$ проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки $C$.

**6.** Восстановите треугольник с помощью циркуля и линейки по точке пересечения высот и основаниям медианы и биссектрисы, проведенных к одной из сторон. (*Исследование проводить не требуется.*)


**VIII всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина**

**X устная олимпиада по геометрии**

**г. Москва, 8 апреля 2012 года**

## 8–9 класс

**1.** В трапеции $ABCD$ стороны $AD$ и $BC$ параллельны, и $AB = BC = BD$. Высота $BK$ пересекает диагональ $AC$ в точке $M$. Найдите $\angle CDM$.

**2.** На плоскости даны два равных многоугольника $F$ и $F'$. Известно, что вершины многоугольника $F$ принадлежат $F'$ (могут лежать внутри него или на границе). Верно ли, что все вершины этих многоугольников совпадают?

**3.** Дан равносторонний треугольник $ABC$ и прямая $l$, проходящая через его центр. Точки пересечения этой прямой со сторонами $AB$ и $BC$ отразили относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через получившиеся точки, касается вписанной окружности треугольника $ABC$.

**4.** В треугольнике $ABC$ точка $I$ — центр вписанной окружности, точки $I_A$ и $I_C$ — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон $BC$ и $AB$ соответственно. Точка $O$ — центр описанной окружности треугольника $II_AI_C$. Докажите, что $OI \perp AC$.

---

## 8–9 класс

**5.** Дана окружность и хорда $AB$, отличная от диаметра. По бо́льшей дуге $AB$ движется точка $C$. Окружность, проходящая через точки $A$, $C$ и точку $H$ пересечения высот треугольника $ABC$, повторно пересекает прямую $BC$ в точке $P$. Докажите, что прямая $PH$ проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки $C$.

**6.** Восстановите треугольник с помощью циркуля и линейки по точке пересечения высот и основаниям медианы и биссектрисы, проведенных к одной из сторон. (*Исследование проводить не требуется.*)

**VIII всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина**

**X устная олимпиада по геометрии**

**г. Москва, 8 апреля 2012 года**

## 10–11 класс

**1.** Верно ли, что центр вписанной окружности треугольника лежит внутри треугольника, образованного средними линиями данного?

**2.** В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$: $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AB = AE$, $BC = CD$, $AC = 1$. Найдите площадь пятиугольника.

**3.** $H$ — точка пересечения высот $AA'$ и $BB'$ остроугольного треугольника $ABC$. Прямая, перпендикулярная $AB$, пересекает эти высоты в точках $D$ и $E$, а сторону $AB$ — в точке $P$. Докажите, что ортоцентр треугольника $DEH$ лежит на отрезке $CP$.

**4.** Внутри выпуклого многогранника выбрана точка $P$ и несколько прямых $\ell_1$, ..., $\ell_n$, проходящих через $P$ и не лежащих в одной плоскости. Каждой грани многогранника поставим в соответствие ту из прямых $l_1$, $l_2$, ..., $l_n$, которая образует наибольший угол с плоскостью этой грани (если таких прямых несколько, выберем любую из них). Докажите, что найдется грань, которая пересекается с соответствующей ей прямой.

---

## 10–11 класс

**5.** Внутри окружности с центром $O$ отмечены точки $A$ и $B$ так, что $OA = OB$. Постройте на окружности точку $M$, для которой сумма расстояний до точек $A$ и $B$ наименьшая среди всех возможных.

**6.** Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$ в точках $A$ и $C$, пересекаются в точке $Z$. $AA_1$, $CC_1$ — высоты. Прямая $A_1C_1$ пересекает прямые $ZA$, $ZC$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $ABC$ и $XYZ$ касаются.


**VIII всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина**

**X устная олимпиада по геометрии**

**г. Москва, 8 апреля 2012 года**

## 10–11 класс

**1.** Верно ли, что центр вписанной окружности треугольника лежит внутри треугольника, образованного средними линиями данного?

**2.** В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$: $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AB = AE$, $BC = CD$, $AC = 1$. Найдите площадь пятиугольника.

**3.** $H$ — точка пересечения высот $AA'$ и $BB'$ остроугольного треугольника $ABC$. Прямая, перпендикулярная $AB$, пересекает эти высоты в точках $D$ и $E$, а сторону $AB$ — в точке $P$. Докажите, что ортоцентр треугольника $DEH$ лежит на отрезке $CP$.

**4.** Внутри выпуклого многогранника выбрана точка $P$ и несколько прямых $\ell_1$, ..., $\ell_n$, проходящих через $P$ и не лежащих в одной плоскости. Каждой грани многогранника поставим в соответствие ту из прямых $l_1$, $l_2$, ..., $l_n$, которая образует наибольший угол с плоскостью этой грани (если таких прямых несколько, выберем любую из них). Докажите, что найдется грань, которая пересекается с соответствующей ей прямой.

---

## 10–11 класс

**5.** Внутри окружности с центром $O$ отмечены точки $A$ и $B$ так, что $OA = OB$. Постройте на окружности точку $M$, для которой сумма расстояний до точек $A$ и $B$ наименьшая среди всех возможных.

**6.** Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$ в точках $A$ и $C$, пересекаются в точке $Z$. $AA_1$, $CC_1$ — высоты. Прямая $A_1C_1$ пересекает прямые $ZA$, $ZC$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $ABC$ и $XYZ$ касаются.