

8–9 класс

1. В треугольнике ABC : $\angle A = 45^\circ$, BH — высота, точка K лежит на стороне AC , причем $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH .

(Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)

2. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка M так, что $AD = DM$. На стороне AD взята точка N так, что $AB = BN$. Докажите, что $CM = CN$.

3. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ равна какой-то стороне?

4. В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно, причем точка P лежит на отрезке AQ . Докажите, что описанные окружности треугольников PBC и QBA пересекаются на биссектрисе угла PBQ .

8–9 класс

5. Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC , которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC .

6. Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB взята точка M такая, что угол MAV на 15° больше угла MAC , а угол MCB на 15° больше угла MBC . Найдите угол BMC .

8–9 класс

1. В треугольнике ABC : $\angle A = 45^\circ$, BH — высота, точка K лежит на стороне AC , причем $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH .

(Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)

2. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка M так, что $AD = DM$. На стороне AD взята точка N так, что $AB = BN$. Докажите, что $CM = CN$.

3. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ равна какой-то стороне?

4. В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно, причем точка P лежит на отрезке AQ . Докажите, что описанные окружности треугольников PBC и QBA пересекаются на биссектрисе угла PBQ .

8–9 класс

5. Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC , которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC .

6. Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB взята точка M такая, что угол MAV на 15° больше угла MAC , а угол MCB на 15° больше угла MBC . Найдите угол BMC .

10–11 класс

1. В трапеции $ABCD$: $BC < AD$, $AB = CD$, K — середина AD , M — середина CD , CH — высота. Докажите, что прямые AM , CK и BH пересекаются в одной точке.

2. Можно ли правильную треугольную призму разрезать на две равные пирамиды?

3. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I . Описанные окружности треугольников AIC_1 и CIA_1 повторно пересекают дуги AC и BC (не содержащие точек B и A соответственно) описанной окружности треугольника ABC в точках C_2 и A_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .

4. Медианы AA_0 , BB_0 и CC_0 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M , а высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 — в точке H . Касательная к описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ в точке C_1 пересекает прямую A_0B_0 в точке C' . Точки A' и B' определяются аналогично. Докажите, что A' , B' и C' лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой MH .

10–11 класс

5. Дан правильный треугольник ABC , площадь которого равна 1, и точка P на его описанной окружности. Прямые AP , BP , CP пересекают соответственно прямые BC , CA , AB в точках A' , B' , C' . Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры невписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка K пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD .

10–11 класс

1. В трапеции $ABCD$: $BC < AD$, $AB = CD$, K — середина AD , M — середина CD , CH — высота. Докажите, что прямые AM , CK и BH пересекаются в одной точке.

2. Можно ли правильную треугольную призму разрезать на две равные пирамиды?

3. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I . Описанные окружности треугольников AIC_1 и CIA_1 повторно пересекают дуги AC и BC (не содержащие точек B и A соответственно) описанной окружности треугольника ABC в точках C_2 и A_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .

4. Медианы AA_0 , BB_0 и CC_0 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M , а высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 — в точке H . Касательная к описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ в точке C_1 пересекает прямую A_0B_0 в точке C' . Точки A' и B' определяются аналогично. Докажите, что A' , B' и C' лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой MH .

10–11 класс

5. Дан правильный треугольник ABC , площадь которого равна 1, и точка P на его описанной окружности. Прямые AP , BP , CP пересекают соответственно прямые BC , CA , AB в точках A' , B' , C' . Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры невписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка K пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD .