

8–9 класс

1. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = CK$. Точки N и M — середины отрезков AK и BC соответственно. Отрезки NM и CK пересекаются в точке P . Докажите, что $KN = KP$.

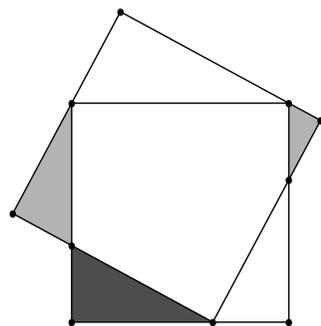
2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна BC .

3. Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно четырехугольника $ABCD$. Известно, что $BC \parallel AD$ и $AN = CM$. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?

4. Рассматриваются треугольники ABC , в которых точка M лежит на стороне AB , $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$ ($c < a$, $c < b$). Найдите наименьший радиус окружности, описанной около таких треугольников.

8–9 класс

5. Два квадрата расположены, как показано на рисунке. Докажите, что площадь черного треугольника равна сумме площадей серых.



6. Вокруг треугольника ABC с острым углом C описана окружность. На дуге AB , не содержащей точку C , выбрана точка D . Точка D' симметрична точке D относительно прямой AB . Прямые AD' и BD' пересекают отрезки BC и AC в точках E и F . Пусть точка C движется по своей дуге AB . Докажите, что центр описанной окружности треугольника CEF движется по прямой.

8–9 класс

1. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = CK$. Точки N и M — середины отрезков AK и BC соответственно. Отрезки NM и CK пересекаются в точке P . Докажите, что $KN = KP$.

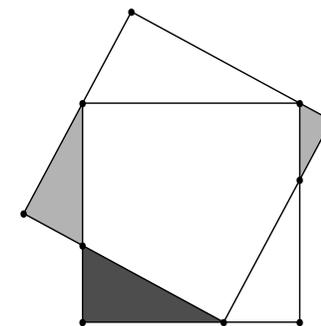
2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна BC .

3. Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно четырехугольника $ABCD$. Известно, что $BC \parallel AD$ и $AN = CM$. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?

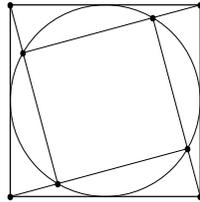
4. Рассматриваются треугольники ABC , в которых точка M лежит на стороне AB , $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$ ($c < a$, $c < b$). Найдите наименьший радиус окружности, описанной около таких треугольников.

8–9 класс

5. Два квадрата расположены, как показано на рисунке. Докажите, что площадь черного треугольника равна сумме площадей серых.



6. Вокруг треугольника ABC с острым углом C описана окружность. На дуге AB , не содержащей точку C , выбрана точка D . Точка D' симметрична точке D относительно прямой AB . Прямые AD' и BD' пересекают отрезки BC и AC в точках E и F . Пусть точка C движется по своей дуге AB . Докажите, что центр описанной окружности треугольника CEF движется по прямой.

10–11 класс

1. Один квадрат вписан в окружность, а другой квадрат описан около той же окружности так, что его вершины лежат на продолжениях сторон первого (см. рисунок). Найдите угол между сторонами этих квадратов.

2. Какое наибольшее количество граней n -угольной пирамиды может быть перпендикулярно основанию?

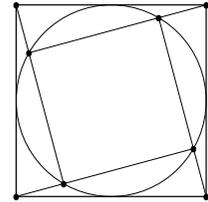
3. На плоскости дан неравносторонний треугольник, описанная около него окружность и отмечен центр его вписанной окружности. Пользуясь только линейкой без делений и проведя не больше семи линий, постройте диаметр описанной окружности.

4. Докажите, что окружность, построенная на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, касается его вписанной окружности тогда и только тогда, когда сторона AB равна радиусу описанной окружности, касающейся этой стороны.

10–11 класс

5. Вписанная окружность неравностороннего треугольника ABC касается сторон AB , BC и AC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Описанная окружность треугольника A_1BC_1 пересекает прямые B_1A_1 и B_1C_1 в точках A_0 и C_0 соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника A_0BC_0 , центр вписанной окружности треугольника ABC и середина стороны AC лежат на одной прямой.

6. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Пусть w — его описанная окружность, точка M — середина стороны BC , P — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника AB_1C_1 и w , T — точка пересечения касательных к w , проведенных в точках B и C , S — точка пересечения AT и w . Докажите, что P , A_1 , S и середина отрезка MT лежат на одной прямой.

10–11 класс

1. Один квадрат вписан в окружность, а другой квадрат описан около той же окружности так, что его вершины лежат на продолжениях сторон первого (см. рисунок). Найдите угол между сторонами этих квадратов.

2. Какое наибольшее количество граней n -угольной пирамиды может быть перпендикулярно основанию?

3. На плоскости дан неравносторонний треугольник, описанная около него окружность и отмечен центр его вписанной окружности. Пользуясь только линейкой без делений и проведя не больше семи линий, постройте диаметр описанной окружности.

4. Докажите, что окружность, построенная на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, касается его вписанной окружности тогда и только тогда, когда сторона AB равна радиусу описанной окружности, касающейся этой стороны.

10–11 класс

5. Вписанная окружность неравностороннего треугольника ABC касается сторон AB , BC и AC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Описанная окружность треугольника A_1BC_1 пересекает прямые B_1A_1 и B_1C_1 в точках A_0 и C_0 соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника A_0BC_0 , центр вписанной окружности треугольника ABC и середина стороны AC лежат на одной прямой.

6. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Пусть w — его описанная окружность, точка M — середина стороны BC , P — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника AB_1C_1 и w , T — точка пересечения касательных к w , проведенных в точках B и C , S — точка пересечения AT и w . Докажите, что P , A_1 , S и середина отрезка MT лежат на одной прямой.