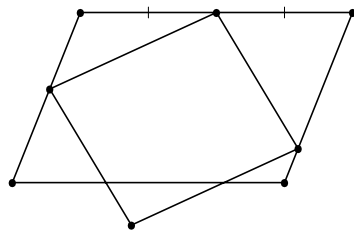


8–9 класс

1. Два параллелограмма расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что диагональ одного параллелограмма проходит через точку пересечения диагоналей другого.



2. Биссектриса угла C и внешнего угла A трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке M , а биссектриса угла B и внешнего угла D — в точке N . Докажите, что середина отрезка MN равноудалена от прямых AB и CD .

3. На продолжениях сторон CA и AB треугольника ABC за точки A и B соответственно отложены отрезки $AE = BC$ и $BF = AC$. Окружность касается отрезка BF в точке N , стороны BC и продолжения стороны AC за точку C . Точка M — середина отрезка EF . Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла A .

4. Даны треугольник ABC ($AB > AC$) и описанная около него окружность. Постройте циркулем и линейкой середину дуги BC (не содержащей вершину A), проведя не более двух линий.

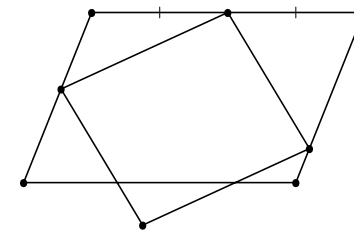
8–9 класс

5. Фиксированы окружность, описанная около остроугольного треугольника ABC , и вершина C . Ортоцентр H движется по окружности с центром в точке C . Найдите ГМТ середин отрезков, соединяющих основания высот, проведенных из вершин A и B .

6. Разрежьте каждый из равносторонних треугольников со сторонами 2 и 3 на три части и сложите из всех полученных частей равносторонний треугольник.

8–9 класс

1. Два параллелограмма расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что диагональ одного параллелограмма проходит через точку пересечения диагоналей другого.



2. Биссектриса угла C и внешнего угла A трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке M , а биссектриса угла B и внешнего угла D — в точке N . Докажите, что середина отрезка MN равноудалена от прямых AB и CD .

3. На продолжениях сторон CA и AB треугольника ABC за точки A и B соответственно отложены отрезки $AE = BC$ и $BF = AC$. Окружность касается отрезка BF в точке N , стороны BC и продолжения стороны AC за точку C . Точка M — середина отрезка EF . Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла A .

4. Даны треугольник ABC ($AB > AC$) и описанная около него окружность. Постройте циркулем и линейкой середину дуги BC (не содержащей вершину A), проведя не более двух линий.

8–9 класс

5. Фиксированы окружность, описанная около остроугольного треугольника ABC , и вершина C . Ортоцентр H движется по окружности с центром в точке C . Найдите ГМТ середин отрезков, соединяющих основания высот, проведенных из вершин A и B .

6. Разрежьте каждый из равносторонних треугольников со сторонами 2 и 3 на три части и сложите из всех полученных частей равносторонний треугольник.

10–11 класс

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели биссектрисы AK и BN , на которые опустили перпендикуляры CD и CE из вершины прямого угла. Докажите, что длина отрезка DE равна радиусу вписанной окружности.

2. Диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Точка M — середина боковой стороны AB , точка N симметрична центру описанной окружности треугольника ABD относительно прямой AD . Докажите, что $\angle CMN = 90^\circ$.

3. Фиксированы окружность, точка A на ней и точка K вне окружности. Секущая, проходящая через K , пересекает окружность в точках P и Q . Докажите, что ортоцентры треугольников APQ лежат на фиксированной окружности.

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка M . В треугольнике ACM точка I_1 — центр вписанной, J_1 — центр внеписанной окружности, касающейся стороны CM . В треугольнике BCM точка I_2 — центр вписанной, J_2 — центр внеписанной окружности, касающейся стороны CM . Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков I_1I_2 и J_1J_2 перпендикулярна AB .

10–11 класс

5. На поверхности равногранного тетраэдра сидят два муравья. Докажите, что они могут встретиться, преодолев в сумме расстояние, не превосходящее диаметра окружности, описанной около грани тетраэдра.

6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Описанная окружность треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках A_1 и A_2 . Пусть ω_A — окружность, описанная около треугольника AA_1A_2 . Аналогично определяются ω_B и ω_C . Докажите, что эти три окружности пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .

10–11 класс

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели биссектрисы AK и BN , на которые опустили перпендикуляры CD и CE из вершины прямого угла. Докажите, что длина отрезка DE равна радиусу вписанной окружности.

2. Диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Точка M — середина боковой стороны AB , точка N симметрична центру описанной окружности треугольника ABD относительно прямой AD . Докажите, что $\angle CMN = 90^\circ$.

3. Фиксированы окружность, точка A на ней и точка K вне окружности. Секущая, проходящая через K , пересекает окружность в точках P и Q . Докажите, что ортоцентры треугольников APQ лежат на фиксированной окружности.

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка M . В треугольнике ACM точка I_1 — центр вписанной, J_1 — центр внеписанной окружности, касающейся стороны CM . В треугольнике BCM точка I_2 — центр вписанной, J_2 — центр внеписанной окружности, касающейся стороны CM . Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков I_1I_2 и J_1J_2 перпендикулярна AB .

10–11 класс

5. На поверхности равногранного тетраэдра сидят два муравья. Докажите, что они могут встретиться, преодолев в сумме расстояние, не превосходящее диаметра окружности, описанной около грани тетраэдра.

6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Описанная окружность треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках A_1 и A_2 . Пусть ω_A — окружность, описанная около треугольника AA_1A_2 . Аналогично определяются ω_B и ω_C . Докажите, что эти три окружности пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .