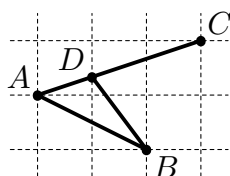


8–9 класс

1. На клетчатой бумаге отметили точки A , B , C и D (см. рис.). Найдите тангенс угла ABD . (Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.)



2. Дана трапеция, в которой одно основание в два раза больше другого. С помощью одной линейки (без делений) постройте среднюю линию этой трапеции.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C острые и равные между собой, а угол ABD — прямой. Точка M — середина отрезка AC . Докажите, что прямые MB и CD перпендикулярны.

4. На диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрали точку E так, что $\angle ABE = \angle CBD$. Точки O , O_1 , O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC , ABE и CBE соответственно. Докажите, что прямые AO_1 , CO_2 и DO пересекаются в одной точке.

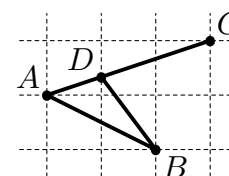
8–9 класс

5. Трапеция вписана в окружность. Докажите, что сумма расстояний от любой точки окружности до середин боковых сторон не меньше диагонали трапеции.

6. Точка M — середина стороны BC остроугольного неравностороннего треугольника ABC , H — ортоцентр этого треугольника. Прямая MH пересекается с биссектрисой угла A в точке Q . Окружность, построенная на AQ как на диаметре, пересекает прямые AB и AC в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через точку H .

8–9 класс

1. На клетчатой бумаге отметили точки A , B , C и D (см. рис.). Найдите тангенс угла ABD . (Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.)



2. Дана трапеция, в которой одно основание в два раза больше другого. С помощью одной линейки (без делений) постройте среднюю линию этой трапеции.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C острые и равные между собой, а угол ABD — прямой. Точка M — середина отрезка AC . Докажите, что прямые MB и CD перпендикулярны.

4. На диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрали точку E так, что $\angle ABE = \angle CBD$. Точки O , O_1 , O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC , ABE и CBE соответственно. Докажите, что прямые AO_1 , CO_2 и DO пересекаются в одной точке.

8–9 класс

5. Трапеция вписана в окружность. Докажите, что сумма расстояний от любой точки окружности до середин боковых сторон не меньше диагонали трапеции.

6. Точка M — середина стороны BC остроугольного неравностороннего треугольника ABC , H — ортоцентр этого треугольника. Прямая MH пересекается с биссектрисой угла A в точке Q . Окружность, построенная на AQ как на диаметре, пересекает прямые AB и AC в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через точку H .

10–11 класс

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, E — произвольная точка этой окружности. Известно, что расстояния от точки E до прямых AB , AC , BD и CD равны a , b , c и d соответственно. Докажите, что $ad = bc$.

2. В двух четырёхугольниках равны площади, периметры и соответствующие углы. Обязательно ли такие четырёхугольники равны?

3. В окружности с центром O проведена хорда BC . Точка A движется по большей дуге BC , AL — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника AOL до прямой BC не зависит от положения точки A .

4. Выпуклый восьмигранник $STABCD$ с гранями SAB , SBC , SCD , SDA , TAB , TBC , TCD и TDA таков, что существует сфера, касающаяся всех его ребер. Докажите, что точки A , B , C и D лежат в одной плоскости.

10–11 класс

5. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC точки A' , B' и C' симметричны центру описанной окружности относительно биссектрис. Докажите, что центры окружностей девяти точек треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают.

6. В квадрат $ABCD$ вписан правильный треугольник XYZ так, что точки X , Y и Z лежат на сторонах AB , BC и AD соответственно. Прямая, проходящая через центры квадрата и треугольника, пересекает CD в точке T . Найдите угол CTY .

10–11 класс

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, E — произвольная точка этой окружности. Известно, что расстояния от точки E до прямых AB , AC , BD и CD равны a , b , c и d соответственно. Докажите, что $ad = bc$.

2. В двух четырёхугольниках равны площади, периметры и соответствующие углы. Обязательно ли такие четырёхугольники равны?

3. В окружности с центром O проведена хорда BC . Точка A движется по большей дуге BC , AL — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника AOL до прямой BC не зависит от положения точки A .

4. Выпуклый восьмигранник $STABCD$ с гранями SAB , SBC , SCD , SDA , TAB , TBC , TCD и TDA таков, что существует сфера, касающаяся всех его ребер. Докажите, что точки A , B , C и D лежат в одной плоскости.

10–11 класс

5. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC точки A' , B' и C' симметричны центру описанной окружности относительно биссектрис. Докажите, что центры окружностей девяти точек треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают.

6. В квадрат $ABCD$ вписан правильный треугольник XYZ так, что точки X , Y и Z лежат на сторонах AB , BC и AD соответственно. Прямая, проходящая через центры квадрата и треугольника, пересекает CD в точке T . Найдите угол CTY .