Семнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Девятнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 10 апреля 2022 года

8–9 класс

1. Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Биссектриса угла B пересекает основание AD в точке L. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BLD, лежит на окружности, описанной около трапеции.

2. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы из вершин B и C и серединный перпендикуляр к стороне BC. Далее отметили три точки попарного пересечения этих трёх прямых (запомнив, где какая точка), а сам треугольник стёрли. Восстановите его по отмеченным точкам с помощью циркуля и линейки.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны (но не параллельны), точки M и N — середины AD и BC. Серединный перпендикуляр к MN пересекает стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AP = CQ$.

4. В треугольнике ABC угол C равен 60°. Биссектрисы AA' и BB' пересекаются в точке I. Точка K симметрична I относительно прямой AB. Докажите, что прямые CK и $A'B'$ перпендикулярны.

8–9 класс

5. Даны окружность и проходящая через её центр прямая AB (точки A и B фиксированы, A вне окружности, а B — внутри). Найдите ГМТ пересечения прямых AX и BY, где XY — произвольный диаметр окружности.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC вписанная окружность касается стороны BC в точке T, Q — середина высоты AK, P — ортоцентр треугольника, образованного биссектрисами углов B и C и прямой AK. Докажите, что точки P, Q и T лежат на одной прямой.

Семнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Девятнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 10 апреля 2022 года

8–9 класс

1. Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Биссектриса угла B пересекает основание AD в точке L. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BLD, лежит на окружности, описанной около трапеции.

2. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы из вершин B и C и серединный перпендикуляр к стороне BC. Далее отметили три точки попарного пересечения этих трёх прямых (запомнив, где какая точка), а сам треугольник стёрли. Восстановите его по отмеченным точкам с помощью циркуля и линейки.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны (но не параллельны), точки M и N — середины AD и BC. Серединный перпендикуляр к MN пересекает стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AP = CQ$.

4. В треугольнике ABC угол C равен 60°. Биссектрисы AA' и BB' пересекаются в точке I. Точка K симметрична I относительно прямой AB. Докажите, что прямые CK и $A'B'$ перпендикулярны.

8–9 класс

5. Даны окружность и проходящая через её центр прямая AB (точки A и B фиксированы, A вне окружности, а B — внутри). Найдите ГМТ пересечения прямых AX и BY, где XY — произвольный диаметр окружности.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC вписанная окружность касается стороны BC в точке T, Q — середина высоты AK, P — ортоцентр треугольника, образованного биссектрисами углов B и C и прямой AK. Докажите, что точки P, Q и T лежат на одной прямой.

Семнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Девятнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 10 апреля 2022 года

10–11 класс

1. В окружности с центром O проведены хорды AB и AC, равные радиусу. Точки A_1, B_1 и C_1 — проекции точек A, B и C соответственно на произвольный диаметр XY. Докажите, что один из отрезков XB_1, OA_1 и C_1Y равен сумме двух других.

2. В остроугольном треугольнике ABC: O — центр описанной окружности ω, P — точка пересечения касательных к ω, проведённых через точки B и C. Продолжение медианы AM пересекает окружность ω в точке D. Докажите, что точки A, D, P и O лежат на одной окружности.

3. Продолжения противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. На сторонах $ABCD$ отметили точки (по одной на стороне), являющиеся вершинами параллелограмма со стороной, параллельной PQ. Докажите, что точка пересечения диагоналей этого параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

4. Нарисован остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, описанная около него окружность и её центр O. Также отмечена середина стороны AB. Пользуясь только линейкой (без делений), постройте ортоцентр треугольника, проведя не более 6 линий.

10–11 класс

5. Окружность ω касается внутренним образом окружности Ω в точке C. Хорда AB окружности Ω касается ω. Хорды CF и BG окружности Ω пересекаются в точке E, лежащей на ω. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CGE, касается прямой AF.

6. В тетраэдре отрезки, соединяющие середины высот с ортоцентрами граней, к которым проведены эти высоты, пересекаются в одной точке. Докажите, что в таком тетраэдре все грани равны или найдутся перпендикулярные ребра.

Семнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Девятнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 10 апреля 2022 года

10–11 класс

1. В окружности с центром O проведены хорды AB и AC, равные радиусу. Точки A_1, B_1 и C_1 — проекции точек A, B и C соответственно на произвольный диаметр XY. Докажите, что один из отрезков XB_1, OA_1 и C_1Y равен сумме двух других.

2. В остроугольном треугольнике ABC: O — центр описанной окружности ω, P — точка пересечения касательных к ω, проведённых через точки B и C. Продолжение медианы AM пересекает окружность ω в точке D. Докажите, что точки A, D, P и O лежат на одной окружности.

3. Продолжения противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. На сторонах $ABCD$ отметили точки (по одной на стороне), являющиеся вершинами параллелограмма со стороной, параллельной PQ. Докажите, что точка пересечения диагоналей этого параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

4. Нарисован остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, описанная около него окружность и её центр O. Также отмечена середина стороны AB. Пользуясь только линейкой (без делений), постройте ортоцентр треугольника, проведя не более 6 линий.

10–11 класс

5. Окружность ω касается внутренним образом окружности Ω в точке C. Хорда AB окружности Ω касается ω. Хорды CF и BG окружности Ω пересекаются в точке E, лежащей на ω. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CGE, касается прямой AF.

6. В тетраэдре отрезки, соединяющие середины высот с ортоцентрами граней, к которым проведены эти высоты, пересекаются в одной точке. Докажите, что в таком тетраэдре все грани равны или найдутся перпендикулярные ребра.