Девятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 16 апреля 2023 года

8–9 класс

1. В трапеции $ABCD$: $AD = 2BC$, M — середина боковой стороны AB. Докажите, что прямая BD проходит через середину отрезка CM.

2. Есть квадратный лист бумаги. Как получить прямоугольный лист бумаги с отношением сторон, равным $\sqrt{2}$? (*Инструментов никаких нет, лист можно только сгибать.*)

3. Треугольник ABC вписан в окружность. M — точка дуги BC (не содержащей A); M_1 — симметрична M относительно стороны BC. Докажите, что AM_1 делится пополам окружностью, проходящей через середины сторон треугольника ABC.

4. Пусть I — центр вписанной окружности w треугольника ABC, касающейся сторон AB и AC в точках E и F соответственно. Прямые, проходящие через E и F параллельно AI, пересекают прямые BI и CI в точках P и Q соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника IPQ, лежит на прямой BC.

8–9 класс

5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, $\angle A = 60^\circ$, $AB < AC$, медиана AM пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K; L — середина дуги BC описанной окружности, не содержащей точку A; прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EHL = \angle ABK$.

6. Дана окружность Ω, касающаяся стороны AB угла BAC и лежащая вне этого угла. Рассматриваются окружности w, вписанные в угол BAC. Общая внутренняя касательная к Ω и w, отличная от AB, касается w в точке K. Пусть L — точка касания w и AC. Докажите, что все такие прямые KL проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности w.

Девятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 16 апреля 2023 года

8–9 класс

1. В трапеции $ABCD$: $AD = 2BC$, M — середина боковой стороны AB. Докажите, что прямая BD проходит через середину отрезка CM.

2. Есть квадратный лист бумаги. Как получить прямоугольный лист бумаги с отношением сторон, равным $\sqrt{2}$? (*Инструментов никаких нет, лист можно только сгибать.*)

3. Треугольник ABC вписан в окружность. M — точка дуги BC (не содержащей A); M_1 — симметрична M относительно стороны BC. Докажите, что AM_1 делится пополам окружностью, проходящей через середины сторон треугольника ABC.

4. Пусть I — центр вписанной окружности w треугольника ABC, касающейся сторон AB и AC в точках E и F соответственно. Прямые, проходящие через E и F параллельно AI, пересекают прямые BI и CI в точках P и Q соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника IPQ, лежит на прямой BC.

8–9 класс

5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, $\angle A = 60^\circ$, $AB < AC$, медиана AM пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K; L — середина дуги BC описанной окружности, не содержащей точку A; прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EHL = \angle ABK$.

6. Дана окружность Ω, касающаяся стороны AB угла BAC и лежащая вне этого угла. Рассматриваются окружности w, вписанные в угол BAC. Общая внутренняя касательная к Ω и w, отличная от AB, касается w в точке K. Пусть L — точка касания w и AC. Докажите, что все такие прямые KL проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности w.

Девятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 16 апреля 2023 года

10–11 класс

1. В треугольнике ABC: $\angle B = 60^\circ$, O — центр описанной окружности. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W. Докажите, что OW касается окружности, описанной около треугольника BOL.

2. Точки X_1 и X_2 движутся по фиксированным окружностям с центрами O_1 и O_2 соответственно так, что лучи O_1X_1 и O_2X_2 сонаправлены. Найдите ГМТ точек пересечения прямых O_1X_2 и O_2X_1.

3. В остроугольном треугольнике ABC прямая OI, проходящая через центры описанной и вписанной окружности, параллельна стороне BC. Докажите, что центр окружности девяти точек треугольника ABC лежит на прямой MI, где M — середина стороны BC.

4. Дан равногранный тетрадр $PABC$ (грани — равные треугольники). Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами BC, AC и AB соответственно; A_1, B_1 и C_1 — точки касания вневписанных окружностей треугольников PCA, PAB и PBC с продолжениями сторон PA, PB и PC соответственно (за точки A, B, C). Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

10–11 класс

5. В остроугольном треугольнике ABC с ортоцентром H прямая AH пересекает BC в точке A_1. Пусть Γ — окружность с центром на стороне AB, касающаяся AA_1 в точке H. Докажите, что Γ касается описанной окружности треугольника AMA_1, где M — середина AC.

6. Точки C_1 и C_2 лежат на стороне AB треугольника ABC, причем точка C_1 принадлежит отрезку AC_2 и $\angle ACC_1 = \angle BCC_2$. На отрезках CC_1 и CC_2 выбраны точки A' и B' так, что $\angle CAA' = \angle CBB' = \angle C_1CC_2$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $CA'B'$, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

Девятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 16 апреля 2023 года

10–11 класс

1. В треугольнике ABC: $\angle B = 60^\circ$, O — центр описанной окружности. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W. Докажите, что OW касается окружности, описанной около треугольника BOL.

2. Точки X_1 и X_2 движутся по фиксированным окружностям с центрами O_1 и O_2 соответственно так, что лучи O_1X_1 и O_2X_2 сонаправлены. Найдите ГМТ точек пересечения прямых O_1X_2 и O_2X_1.

3. В остроугольном треугольнике ABC прямая OI, проходящая через центры описанной и вписанной окружности, параллельна стороне BC. Докажите, что центр окружности девяти точек треугольника ABC лежит на прямой MI, где M — середина стороны BC.

4. Дан равногранный тетрадр $PABC$ (грани — равные треугольники). Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами BC, AC и AB соответственно; A_1, B_1 и C_1 — точки касания вневписанных окружностей треугольников PCA, PAB и PBC с продолжениями сторон PA, PB и PC соответственно (за точки A, B, C). Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

10–11 класс

5. В остроугольном треугольнике ABC с ортоцентром H прямая AH пересекает BC в точке A_1. Пусть Γ — окружность с центром на стороне AB, касающаяся AA_1 в точке H. Докажите, что Γ касается описанной окружности треугольника AMA_1, где M — середина AC.

6. Точки C_1 и C_2 лежат на стороне AB треугольника ABC, причем точка C_1 принадлежит отрезку AC_2 и $\angle ACC_1 = \angle BCC_2$. На отрезках CC_1 и CC_2 выбраны точки A' и B' так, что $\angle CAA' = \angle CBB' = \angle C_1CC_2$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $CA'B'$, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.