Двадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцать первая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2024 года

8–9 класс

1. В равнобокой трапеции диагонали перпендикулярны. Найдите расстояние от центра окружности, описанной около трапеции, до точки пересечения ее диагоналей, если длины оснований равны a и b.

2. В треугольнике ABC провели биссектрису BL. Пусть точки I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABL и CBL, а точки J_1 и J_2 — центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся стороны BL. Докажите, что точки I_1, I_2, J_1 и J_2 лежат на одной окружности.

3. Внутри квадрата $ABCD$ на стороне AB построен равносторонний треугольник ABE, а на диагонали AC — равносторонний треугольник AFC (D — внутри этого треугольника). Отрезок EF пересекает CD в точке P. Докажите, что прямые AP, BE и CF пересекаются в одной точке.

4. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен $60°$. Вписанная в треугольник окружность с центром I касается стороны AC в точке K. Прямая, проходящая через точки касания этой окружности с другими сторонами треугольника, пересекает описанную около него окружность в точках M и N. Докажите, что луч KI делит дугу MN пополам.

8–9 класс

5. Нарисован остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, описанная около него окружность и ее центр O. Также отмечен центр I вписанной окружности. Пользуясь только линейкой (без делений) постройте симедиану (*прямую, симметричную медиане относительно соответствующей биссектрисы*) треугольника, проведя не более четырех линий.

6. Дан остроугольный треугольник ABC и такая точка P внутри него, что $\angle PBA = \angle PCA$. Прямые PB и PC пересекают описанные окружности треугольников PCA и PAB повторно в точках M и N соответственно. Пусть лучи MC и NB пересекаются в точке S, K — центр описанной окружности треугольника SMN. Докажите, что прямые AK и BC перпендикулярны.

Двадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцать первая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2024 года

8–9 класс

1. В равнобокой трапеции диагонали перпендикулярны. Найдите расстояние от центра окружности, описанной около трапеции, до точки пересечения ее диагоналей, если длины оснований равны a и b.

2. В треугольнике ABC провели биссектрису BL. Пусть точки I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABL и CBL, а точки J_1 и J_2 — центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся стороны BL. Докажите, что точки I_1, I_2, J_1 и J_2 лежат на одной окружности.

3. Внутри квадрата $ABCD$ на стороне AB построен равносторонний треугольник ABE, а на диагонали AC — равносторонний треугольник AFC (D — внутри этого треугольника). Отрезок EF пересекает CD в точке P. Докажите, что прямые AP, BE и CF пересекаются в одной точке.

4. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен $60°$. Вписанная в треугольник окружность с центром I касается стороны AC в точке K. Прямая, проходящая через точки касания этой окружности с другими сторонами треугольника, пересекает описанную около него окружность в точках M и N. Докажите, что луч KI делит дугу MN пополам.

8–9 класс

5. Нарисован остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, описанная около него окружность и ее центр O. Также отмечен центр I вписанной окружности. Пользуясь только линейкой (без делений) постройте симедиану (*прямую, симметричную медиане относительно соответствующей биссектрисы*) треугольника, проведя не более четырех линий.

6. Дан остроугольный треугольник ABC и такая точка P внутри него, что $\angle PBA = \angle PCA$. Прямые PB и PC пересекают описанные окружности треугольников PCA и PAB повторно в точках M и N соответственно. Пусть лучи MC и NB пересекаются в точке S, K — центр описанной окружности треугольника SMN. Докажите, что прямые AK и BC перпендикулярны.

Двадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцать первая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2024 года

10–11 класс

1. Пусть P — точка внутри остроугольного треугольника ABC, а A', B', C' — проекции P на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что диаметр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, равен PC тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника ABP, проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

2. Петя нарисовал на плоскости пятиугольник $ABCDE$. После этого Вася отметил все точки S в заданном полупространстве относительно плоскости пятиугольника так, что в пирамиде $SABCDE$ ровно две боковые грани перпендикулярны плоскости основания $ABCDE$, а высота равна 1. Сколько точек могло получиться у Васи?

3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC касается соответствующей вневписанной окружности ω в точке T. Точка S симметрична T относительно биссектрисы угла C, CH — высота треугольника. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CSH, касается окружности ω.

4. Нарисованы прямые, содержащие стороны неравнобедренного треугольника ABC, центр I его вписанной окружности и описанная около него окружность, центр которой не отмечен. Пользуясь только линейкой (без делений), постройте симедиану треугольника (*прямую, симметричную медиане относительно соответствующей биссектрисы*), проведя не более шести линий.

10–11 класс

5. Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена произвольная прямая l_1, пересекающая отрезок AB и прямую BC в точках C_1 и A_1 соответственно, и произвольная прямая l_2, пересекающая отрезок BC и прямую AB в точках A_2 и C_2 соответственно. Найдите геометрическое место точек пересечения окружностей A_1BC_2 и A_2BC_1 (отличных от точки B).

6. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H, M — середина BC. Точки K и L лежат на прямой, проходящей через H и перпендикулярной AM, причем KB и LC перпендикулярны BC. Точка N лежит на прямой HM, причем прямые AN и AH симметричны относительно прямой AM. Докажите, что окружность с диаметром AN касается двух окружностей: с центром K и радиусом KB и с центром L и радиусом LC.

Двадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двадцать первая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2024 года

10–11 класс

1. Пусть P — точка внутри остроугольного треугольника ABC, а A', B', C' — проекции P на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что диаметр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, равен PC тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника ABP, проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

2. Петя нарисовал на плоскости пятиугольник $ABCDE$. После этого Вася отметил все точки S в заданном полупространстве относительно плоскости пятиугольника так, что в пирамиде $SABCDE$ ровно две боковые грани перпендикулярны плоскости основания $ABCDE$, а высота равна 1. Сколько точек могло получиться у Васи?

3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC касается соответствующей вневписанной окружности ω в точке T. Точка S симметрична T относительно биссектрисы угла C, CH — высота треугольника. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CSH, касается окружности ω.

4. Нарисованы прямые, содержащие стороны неравнобедренного треугольника ABC, центр I его вписанной окружности и описанная около него окружность, центр которой не отмечен. Пользуясь только линейкой (без делений), постройте симедиану треугольника (*прямую, симметричную медиане относительно соответствующей биссектрисы*), проведя не более шести линий.

10–11 класс

5. Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена произвольная прямая l_1, пересекающая отрезок AB и прямую BC в точках C_1 и A_1 соответственно, и произвольная прямая l_2, пересекающая отрезок BC и прямую AB в точках A_2 и C_2 соответственно. Найдите геометрическое место точек пересечения окружностей A_1BC_2 и A_2BC_1 (отличных от точки B).

6. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H, M — середина BC. Точки K и L лежат на прямой, проходящей через H и перпендикулярной AM, причем KB и LC перпендикулярны BC. Точка N лежит на прямой HM, причем прямые AN и AH симметричны относительно прямой AM. Докажите, что окружность с диаметром AN касается двух окружностей: с центром K и радиусом KB и с центром L и радиусом LC.