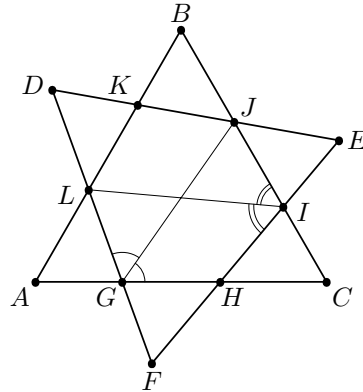


8–9 класс

1. На основании AD трапеции $ABCD$ взяли точку X , равноудаленную от вершин B и C . Докажите, что X лежит на окружности, проходящей через середины отрезков AB , AD и CD .

2. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A , B и C равны 57° , 122° и 57° соответственно. Докажите, что длина ломаной ABC больше длины ломаной ADC .

3. Пусть равные правильные треугольники ABC и DEF пересекаются по шестиугольнику $KJHGL$ (см. рис.). Известно, что биссектриса угла HGL проходит через J , а биссектриса угла HIJ — через L . Докажите, что вписанные окружности этих треугольников совпадают.



4. Дан треугольник ABD . Рассмотрим произвольную точку C такую, что $BC = AB$, а четырёхугольник $ABCD$ — выпуклый. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Окружность, описанная около треугольника KCD , вторично пересекает отрезок AD в точке N . Докажите, что все прямые CN , построенные таким образом, проходят через фиксированную точку.

8–9 класс

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , X симметрична I относительно серединного перпендикуляра к стороне BC , Q и R — середины дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC , не содержащих вершин треугольника ABC . Точка B' симметрична точке B относительно Q , а точка C' симметрична точке C относительно R . Докажите, что точки B' , I , X и C' лежат на одной окружности.

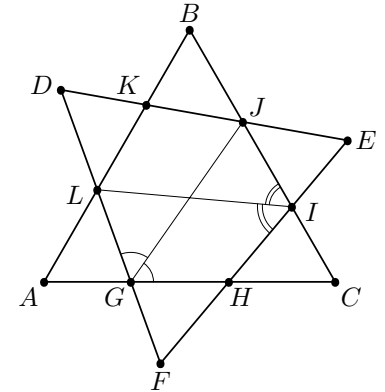
6. На доске нарисованы прямые, содержащие стороны треугольника ABC , отмечен центр его внеписанной окружности, касающейся стороны AB , и две точки касания этой окружности с продолжениями двух других сторон. Используя только линейку (без делений), постройте середину стороны AB , проведя не более шести линий.

8–9 класс

1. На основании AD трапеции $ABCD$ взяли точку X , равноудаленную от вершин B и C . Докажите, что X лежит на окружности, проходящей через середины отрезков AB , AD и CD .

2. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A , B и C равны 57° , 122° и 57° соответственно. Докажите, что длина ломаной ABC больше длины ломаной ADC .

3. Пусть равные правильные треугольники ABC и DEF пересекаются по шестиугольнику $KJHGL$ (см. рис.). Известно, что биссектриса угла HGL проходит через J , а биссектриса угла HIJ — через L . Докажите, что вписанные окружности этих треугольников совпадают.



4. Дан треугольник ABD . Рассмотрим произвольную точку C такую, что $BC = AB$, а четырёхугольник $ABCD$ — выпуклый. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Окружность, описанная около треугольника KCD , вторично пересекает отрезок AD в точке N . Докажите, что все прямые CN , построенные таким образом, проходят через фиксированную точку.

8–9 класс

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , X симметрична I относительно серединного перпендикуляра к стороне BC , Q и R — середины дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC , не содержащих вершин треугольника ABC . Точка B' симметрична точке B относительно Q , а точка C' симметрична точке C относительно R . Докажите, что точки B' , I , X и C' лежат на одной окружности.

6. На доске нарисованы прямые, содержащие стороны треугольника ABC , отмечен центр его внеписанной окружности, касающейся стороны AB , и две точки касания этой окружности с продолжениями двух других сторон. Используя только линейку (без делений), постройте середину стороны AB , проведя не более шести линий.

10–11 класс

1. В прямоугольном неравностороннем треугольнике проведена высота. В исходный треугольник и в два образовавшихся вписали квадраты так, что одна из сторон каждого квадрата лежит на гипотенузе треугольника, в который вписан этот квадрат. Вася отметил все вершины трёх квадратов (некоторые точки могли совпасть). Сколько различных точек отмечено?

2. Дан прямоугольный тетраэдр с ребрами a , b и c , выходящими из вершины прямого трехгранного угла. Найдите радиус наименьшей сферы, содержащей такой тетраэдр.

3. На доске нарисованы прямые, содержащие стороны прямоугольного треугольника, и отмечены две точки касания вневписанной окружности, касающейся гипотенузы, с продолжениями катетов. Используя только линейку (без делений), постройте точки касания вневписанных окружностей с катетами, проведя не более пяти линий.

4. Четырёхугольник $ABCD$, противоположные стороны которого не параллельны, вписан в окружность. Пусть XU — произвольный диаметр этой окружности, P — проекция точки X на прямую AB , Q — проекция точки U на прямую CD . Найдите ГМТ середин отрезков PQ .

10–11 класс

5. Дан неравносторонний остроугольный треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне BC , а также прямые AB и AC образуют треугольник Δ . Пусть L — точка пересечения касательных в точках B и C к окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая AL вторично пересекает эту окружность в точке G ; M — середина BC . Докажите, что окружности, описанные около треугольников LGM и Δ , касаются.

6. В треугольнике ABC биссектрисы BF и CE пересекаются в точке I , G — середина EF , K — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC , проведенных в точках B и C . Докажите, что точки K , I и G лежат на одной прямой.

10–11 класс

1. В прямоугольном неравностороннем треугольнике проведена высота. В исходный треугольник и в два образовавшихся вписали квадраты так, что одна из сторон каждого квадрата лежит на гипотенузе треугольника, в который вписан этот квадрат. Вася отметил все вершины трёх квадратов (некоторые точки могли совпасть). Сколько различных точек отмечено?

2. Дан прямоугольный тетраэдр с ребрами a , b и c , выходящими из вершины прямого трехгранного угла. Найдите радиус наименьшей сферы, содержащей такой тетраэдр.

3. На доске нарисованы прямые, содержащие стороны прямоугольного треугольника, и отмечены две точки касания вневписанной окружности, касающейся гипотенузы, с продолжениями катетов. Используя только линейку (без делений), постройте точки касания вневписанных окружностей с катетами, проведя не более пяти линий.

4. Четырёхугольник $ABCD$, противоположные стороны которого не параллельны, вписан в окружность. Пусть XU — произвольный диаметр этой окружности, P — проекция точки X на прямую AB , Q — проекция точки U на прямую CD . Найдите ГМТ середин отрезков PQ .

10–11 класс

5. Дан неравносторонний остроугольный треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне BC , а также прямые AB и AC образуют треугольник Δ . Пусть L — точка пересечения касательных в точках B и C к окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая AL вторично пересекает эту окружность в точке G ; M — середина BC . Докажите, что окружности, описанные около треугольников LGM и Δ , касаются.

6. В треугольнике ABC биссектрисы BF и CE пересекаются в точке I , G — середина EF , K — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC , проведенных в точках B и C . Докажите, что точки K , I и G лежат на одной прямой.