

8–9 класс

1. В параллелограмме $ABCD$ проведен перпендикуляр DX к диагонали AC . Докажите, что середина отрезка BX равноудалена от A и C .

2. К окружности с центром O проведены касательные PA и PB (A и B — точки касания). На отрезках AB и PB взяли точки M и K соответственно, так, что M — середина отрезка OK . Докажите, что точки A , M , K и P лежат на одной окружности.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE и CF . Точка K — проекция точки пересечения медиан треугольника на сторону BC . Докажите, что $FK + EK \leq BC$.

4. Высоты CC' и BB' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр описанной окружности, точка A_1 симметрична H относительно стороны BC . Точка C_1 на CC' такова, что $OC' = OC_1$, аналогично определена точка B_1 . Докажите, что точки C_1 , B_1 , A_1 и H лежат на одной окружности.

8–9 класс

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Точки C и D движутся по дуге AB окружности ω_1 так, что точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD и $CD = 1$. Отрезки AC и BD пересекают окружность ω_2 в точках N и M соответственно. Прямые BN и AM пересекают соответственно прямые AD и BC в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ касается фиксированной окружности.

6. Нарисован неравносторонний треугольник ABC , описанная около него окружность и ее центр O . Также отмечен центр I вписанной окружности. Пользуясь только линейкой (без делений) постройте точку касания стороны AB с вписанной окружностью, проведя не более четырех линий.

8–9 класс

1. В параллелограмме $ABCD$ проведен перпендикуляр DX к диагонали AC . Докажите, что середина отрезка BX равноудалена от A и C .

2. К окружности с центром O проведены касательные PA и PB (A и B — точки касания). На отрезках AB и PB взяли точки M и K соответственно, так, что M — середина отрезка OK . Докажите, что точки A , M , K и P лежат на одной окружности.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE и CF . Точка K — проекция точки пересечения медиан треугольника на сторону BC . Докажите, что $FK + EK \leq BC$.

4. Высоты CC' и BB' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр описанной окружности, точка A_1 симметрична H относительно стороны BC . Точка C_1 на CC' такова, что $OC' = OC_1$, аналогично определена точка B_1 . Докажите, что точки C_1 , B_1 , A_1 и H лежат на одной окружности.

8–9 класс

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Точки C и D движутся по дуге AB окружности ω_1 так, что точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD и $CD = 1$. Отрезки AC и BD пересекают окружность ω_2 в точках N и M соответственно. Прямые BN и AM пересекают соответственно прямые AD и BC в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ касается фиксированной окружности.

6. Нарисован неравносторонний треугольник ABC , описанная около него окружность и ее центр O . Также отмечен центр I вписанной окружности. Пользуясь только линейкой (без делений) постройте точку касания стороны AB с вписанной окружностью, проведя не более четырех линий.

10–11 класс

1. Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 полностью накрыли двумя равными кругами. Какой наименьший диаметр может быть у этих кругов?

2. Нарисован треугольник ABC с отмеченным центром I вписанной окружности и описанной около него окружностью. Пользуясь только линейкой, и проведя не более четырех линий, постройте прямую, параллельную стороне AB треугольника ABC .

3. Дан пространственный четырехугольник $ABCD$, стороны которого касаются сферы в точках K , L , M и N . Докажите, что середины отрезков AC и BD , центр сферы и центр окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$, лежат в одной плоскости.

4. Даны точки A и B . Точка C движется по фиксированной окружности с хордой AB . Прямые, содержащие высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC , пересекаются в точке H . Прямые, содержащие медианы треугольников A_1CB_1 и AHB , проведенные из вершин C и H соответственно, пересекаются в точке Q . Найдите ГМТ Q .

10–11 класс

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D ; O и I — центры описанной и вписанной окружности соответственно. Точка X лежит на отрезке AD , причем $AX : XD = 2 : 1$. Докажите, что $\angle DIX + \angle AIO = 180^\circ$.

6. В треугольнике ABC угол B равен 60° , O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности, I_b — центр внеписанной окружности, касающейся стороны AC . Прямая OI пересекает прямые AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямая OI_b — в точках C_2 и A_2 соответственно. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке B_1 , а прямые AA_2 и CC_2 — в точке B_2 . Докажите, что середина отрезка B_1B_2 равноудалена от A и C .

10–11 класс

1. Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 полностью накрыли двумя равными кругами. Какой наименьший диаметр может быть у этих кругов?

2. Нарисован треугольник ABC с отмеченным центром I вписанной окружности и описанной около него окружностью. Пользуясь только линейкой, и проведя не более четырех линий, постройте прямую, параллельную стороне AB треугольника ABC .

3. Дан пространственный четырехугольник $ABCD$, стороны которого касаются сферы в точках K , L , M и N . Докажите, что середины отрезков AC и BD , центр сферы и центр окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$, лежат в одной плоскости.

4. Даны точки A и B . Точка C движется по фиксированной окружности с хордой AB . Прямые, содержащие высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC , пересекаются в точке H . Прямые, содержащие медианы треугольников A_1CB_1 и AHB , проведенные из вершин C и H соответственно, пересекаются в точке Q . Найдите ГМТ Q .

10–11 класс

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D ; O и I — центры описанной и вписанной окружности соответственно. Точка X лежит на отрезке AD , причем $AX : XD = 2 : 1$. Докажите, что $\angle DIX + \angle AIO = 180^\circ$.

6. В треугольнике ABC угол B равен 60° , O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности, I_b — центр внеписанной окружности, касающейся стороны AC . Прямая OI пересекает прямые AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямая OI_b — в точках C_2 и A_2 соответственно. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке B_1 , а прямые AA_2 и CC_2 — в точке B_2 . Докажите, что середина отрезка B_1B_2 равноудалена от A и C .