XIV Устная математическая олимпиада для 6–7 классов. 20 марта 2016 года

6 класс.

1. МЁД. У Винни-Пуха пять друзей, у каждого из которых в домике есть горшочки с медом: у Тигры — 1, у Пятачка — 2, у Совы — 3, у Иа-Иа — 4, у Кролика — 5. Винни-Пух по очереди приходит в гости к каждому другу, съедает один горшочек меда, а остальные забирает с собой. К последнему домику он подошел, неся 10 горшочков с медом. Чей домик Пух мог посетить первым?

Ответ: любой, кроме домика Тигры.

Решение. После посещения всех домиков у Винни-Пуха должно остаться $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 5 = 10$ горшочков. Так как перед последним посещением у него уже было 10 горшочков, то последним он посетил домик Тигры. Остальные домики он мог посещать в любом порядке, так как от перемены мест слагаемых значение суммы $(2-1)+(3-1)+(4-1)+(5-1)$ не изменится.

Фольклор

2. КАЛЕНДАРЬ. Есть четыре карточки с цифрами: 2, 0, 1, 6. Для каждого из чисел от 1 до 9 можно из этих карточек составить четырехзначное число, которое кратно выбранному однозначному. А в каком году такое будет в следующий раз?

Ответ: в 2025 году.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 9, его сумма цифр должна делиться на 9. Значит, следующий такой год будет не раньше, чем через 9 лет, то есть в 2025 году. Этот год удовлетворяет условию задачи, так как из карточек 2, 0, 2 и 5 можно составить число 2520. Оно делится на любое однозначное число от 1 до 9, поскольку $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

М. Раскин

3. ПЕРЕПРАВА. На левом берегу реки собрались 5 физиков и 5 химиков. Всем надо на правый берег. Есть двухместная лодка. На правом берегу ни в какой момент не могут находиться ровно три химика или ровно три физика. Каким образом им всем переправиться, сделав 9 рейсов направо?

Решение. См. таблицу.

Номер рейса	Левый берег	Уехали на правый	Вернулись на левый	Правый берег
0	5 физиков, 5 химиков	—	—	—
1	5 физиков, 4 химика	2 химика	1 химик	1 химик
2	4 физика, 4 химика	2 физика	1 физик	1 физик, 1 химик
3	4 физика, 3 химика	1 физик, 1 химик	1 физик	1 физик, 2 химика
4	5 физиков, 1 химик	2 химика	1 физик	4 химика
5	5 физиков	1 физик, 1 химик	1 физик	5 химиков
6	3 физика, 1 химик	2 физика	1 химик	2 физика, 4 химика
7	3 физика	1 физик, 1 химик	1 физик	2 физика, 5 химиков
8	1 физик, 1 химик	2 физика	1 химик	4 физика, 4 химика
9	—	1 физик, 1 химик	—	5 физиков, 5 химиков

А. Шаповалов

4. СУДЬИ. В классе учатся 27 человек, но на урок физкультуры пришли не все. Учитель разбил пришедших на две равные по численности команды для игры в пионербол. При этом в первой команде была половина всех пришедших мальчиков и треть всех пришедших девочек, а во второй — половина всех пришедших девочек и четверть всех пришедших мальчиков. Остальные пришедшие ребята помогали судить. Сколько помощников могло быть у судьи?

Ответ: 2 или 4.

Решение. Из условия задачи следует, что количество пришедших девочек кратно 6, а количество пришедших мальчиков кратно 4. Обозначим эти количества через $6d$ и $4m$ соответственно. Так как численность двух команд была одинаковой, то $2m + 2d = 3d + m$, откуда $m = d$.

Учитывая, что $6d + 4m < 27$, то есть $10d = 10m < 27$, получим: $m = d = 1$ или $m = d = 2$.

Так как судье помогали $1/6$ часть девочек и $1/4$ часть мальчиков, то количество помощников равно $m + d$. Значит, их было либо двое, либо четверо.

Также можно было использовать только условие $6d + 4m < 27$, осуществив полный перебор. Для этого достаточно проверить равенство численности команд для следующих пар $(d; m)$: (1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (3; 1); (3; 2).

Д. Шноль

5. ТРИМИНО. Вася нарисовал карандашом разбиение клетчатого прямоугольника на прямоугольники размером 3×1 (тримино), закрасил ручкой центральную клетку каждого из получившихся прямоугольников, после чего стер карандашные линии. Всегда ли можно восстановить исходное разбиение?

Ответ: всегда.

Решение. Пусть есть два разных разбиения прямоугольника, у которых совпадают закрашенные клетки. Тогда среди этих закрашенных клеток есть такие, которым в одном разбиении соответствуют вертикальной, а в другом — горизонтальной триминошке (назовем такие закрашенные клетки «плохими»).

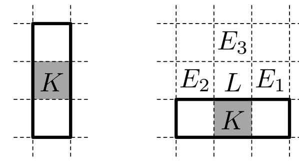

Рис. 6.5

Среди плохих клеток найдем самую верхнюю (любую, если их несколько). Пусть это клетка K и в первом разбиении K покрыта вертикальной, а во втором — горизонтальной триминошкой (см. рис. 6.5). Рассмотрим клетку L — соседнюю с K сверху. Она принадлежит прямоугольнику, поскольку она есть в первом разбиении (покрыта вертикальной триминошкой). Во втором разбиении этой триминошки нет, так что одна из клеток E_1, E_2, E_3 — соседей L справа, слева и сверху — закрашена: это центр триминошки, покрывающей L во втором разбиении. Но в первом разбиении L покрыта не ею, так что найденная нами закрашенная клетка — плохая. Однако E_1, E_2 и E_3 лежат выше K, что противоречит тому, как мы выбрали K.

В. Клепцын, Г. Мерзон

6. ОДНОКЛАССНИКИ. На кружок пришли дети из двух классов: Ваня, Дима, Егор, Инна, Леша, Саша и Таня. На вопрос: «Сколько здесь твоих одноклассников?» каждый честно ответил «Двое» или «Трое». Но мальчики думали, что спрашивают только про мальчиков-одноклассников, а девочки правильно понимали, что спрашивают про всех. Кто Саша — мальчик или девочка?

Ответ: Саша — девочка.

Решение. Пол каждого ребенка, кроме Саши, определяется по именам однозначно, поэтому мальчиков на кружке либо 4, либо 5.

Предположим, что какие-то мальчики учатся в разных классах, тогда их ответы показывают, что на кружок пришло не менее трех мальчиков из каждого класса. Противоречие. Следовательно, все присутствующие мальчики — одноклассники, но тогда их не могло быть пятеро. Значит, Саша — девочка.

Отметим, что описанная ситуация возможна. Действительно, если Саша — девочка, то четыре мальчика учатся в одном классе, а три девочки — в другом. При этом каждый мальчик дал ответ «Трое», а каждая девочка — «Двое».

А. Шаповалов

7. КВАРТИРЫ. Вася живет в многоквартирном доме. В каждом подъезде дома одинаковое количество этажей, на каждом этаже по 4 квартиры, каждая квартира имеет одно, двух или трехзначный номер. Вася заметил, что количество квартир с двузначным номером у него в подъезде в десять раз больше количества подъездов в доме. Сколько всего квартир может быть в этом доме?

Ответ: 160, 900, 936 или 972.

Решение. Так как двузначных номеров квартир не больше чем 90, то количество подъездов не больше чем 9.

1) Пусть все двузначные номера квартир находятся в Васином подъезде. Тогда Вася живет в первом подъезде, квартир в нем не меньше чем 100, значит, этажей в доме не меньше чем 25. Следовательно, в доме 9 подъездов, в каждом из которых может быть по 100, по 104 или по 108 квартир ($112 \cdot 9 > 1000$). Значит, всего квартир в доме 900, 936 или 972.

2) Пусть не все двузначные номера квартир находятся в Васином подъезде. Обозначив количество подъездов через n, получим, что у него в подъезде $10n$ квартир с двузначными номерами, где n — натуральное число от 1 до 8.

Если этот подъезд — первый, то в нем есть однозначные номера квартир, поэтому в Васином подъезде $10n + 9$, что не делится на 4. Противоречие. Следовательно, в Васином подъезде не может находиться 80, 70, 60 или 50 квартир с двузначными номерами (такие количества квартир с двузначными номерами могут быть только в первом подъезде).

Если же в этом подъезде есть трехзначные номера, то во всех предыдущих подъездах в сумме $99 - 10n$ квартир, что также не делится на 4. Противоречие.

Таким образом, в Васином подъезде есть только двузначные номера квартир. Если их 40, то подъездов 4, и в каждом по 40 квартир. Тогда в доме: $40 \cdot 4 = 160$ квартир.

Если же их не больше чем 30, то подъездов не более трех, а квартир не больше чем 90, что противоречит тому, что в доме есть квартиры с трехзначными номерами.

М. Евдокимов

8. КВАДРАТ. На сколько равных восьмиугольников можно разрезать квадрат размером 8×8? (*Все разрезы должны проходить по линиям сетки.*)

Ответ: на 2, 4, 8 или 16.

Решение. Так как многоугольники должны быть равными, то в каждом из них содержится одинаковое количество клеток. Следовательно, количество клеток в одном многоугольнике является делителем числа 64. Его делители: 1, 2, 4, 8, 16 и 32. Одна и две клетки восьмиугольника образовывать не могут, поэтому возможные варианты: 4, 8, 16 или 32 клетки. Соответствующие примеры — см. рис. 6.8а-г.

Сущетвуют также примеры, в которых равные фигуры получаются с помошью «переворота».

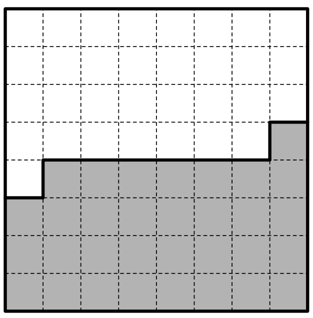

Рис. 6.8а

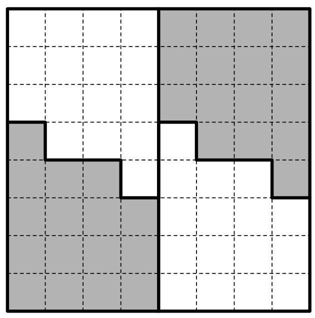

Рис. 6.8б

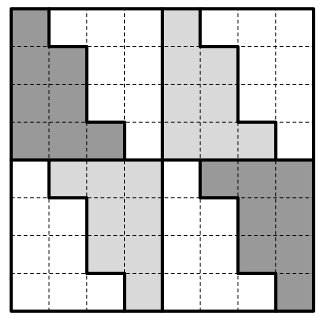

Рис. 6.8в

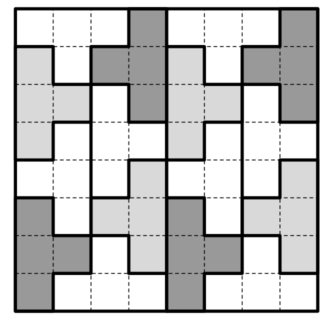

Рис. 6.8г

Э. Акопян, Н. Мартынова

9. КОНФЕТЫ. В магазине продают коробки конфет. Среди них есть не менее пяти коробок разной цены (никакие две из них не стоят одинаково). Какие бы две коробки ни купил Вася, Петя всегда сможет также купить две коробки, потратив столько же денег. Какое наименьшее количество коробок конфет должно быть в продаже?

Ответ: 13.

Решение. Пусть коробки конфет разложены в соответствии с их стоимостью: самые дешевые лежат на нижней полке, следующие по цене — на второй полке и так далее до самых дорогих, лежащих на верхней полке.

Если Вася купил по одной коробке с двух нижних полок, то Петя вынужден купить такие же коробки, значит, на каждой из этих полок должно быть как минимум по две коробки. Если же Вася купил две коробки с нижней полки, то Петя должен будет купить такие же, то есть на нижней полке должно быть по крайней мере четыре коробки.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что на верхней полке должно быть не менее четырех коробок, а на второй полке сверху — не менее двух. Так как полок не менее пяти, то в продаже должно быть не менее чем $4 + 2 + 1 + 2 + 4 = 13$ коробок.

Покажем, что такого количества коробок хватит. Пусть в магазине: четыре коробки по 10 рублей за каждую, две коробки — по 20 рублей, одна — за 30, две — за 40 и четыре — за 50. Некоторые возможные покупки Васи и ответные покупки Пети соответствуют столбикам таблицы:

Вася	$10+30$	$20+20$	$20+30$	$30+40$	$40+40$	$30+50$
Петя	$20+20$	$10+30$	$10+40$	$20+50$	$30+50$	$40+40$

Если же Вася купил набор, не указанный в таблице, то Петя может купить точно такой же.

Н. Мартынова

Вариант составили: *Н. Мартынова*, *Н. Наконечный.*