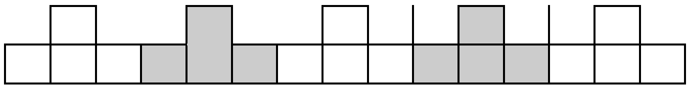
XVII Устная математическая олимпиада для 6 – 7 классов
24.03.2019
6 класс

1. На пять, но не на десять. Придумайте фигуру из двадцати клеток, которую по сторонам клеток можно разрезать на пять равных частей, но нельзя разрезать на десять равных частей.

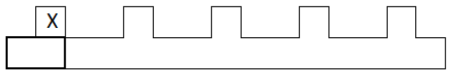
Д. Калинин

Ответ: например, см. рисунок.



Решение. Эта фигура очевидным образом делится на пять равных частей.

На десять равных частей она не делится. Действительно, каждая часть должна состоять из двух клеток, но часть размером 1×2, включающая самую левую клетку, вырезается однозначно (см. рисунок). Тогда клетка, отмеченная крестиком, не попадет ни в одну из частей.



Любая фигура, удовлетворяющая условию задачи, должна делиться на пять частей, каждая из которых тетрамино в виде буквы Т (аналогично приведённому примеру). Действительно, любую другую фигуру из четырех клеток можно разделить на две равные части из двух клеток.

Используя шахматную раскраску, можно доказать, что любая фигура, которая делится на пять Т-тетрамино, не делится на части размером 1×2.

2. Лёня. Буквами Е, Ё, Л, Н, С и Я заменили шесть различных цифр. Суммы цифр чисел ЛЁН, ЛЕС и СЕНЯ равны 3, 19 и 25 соответственно. Из какого числа получилось слово ЛЁНЯ?

Э. Акопян, Д. Калинин

Ответ: 2017.

Решение. Так как сумма цифр числа ЛЁН равна 3, то буквы Л, Ё и Н соответствуют в каком-то порядке цифрам 0, 1 и 2, то есть цифра Л – не больше, чем 2. Так как Е + С не больше, чем 8 + 9 = 17, а сумма цифр числа ЛЕС равна 19, то Л = 2, а Е и С – это 8 и 9 (в каком-то порядке). Тогда в числе СЕНЯ цифры Н и Я в сумме дают 25 – 17 = 8, причём Н – это 0 или 1, а Я не больше, чем 7 (цифры 8 и 9 заняты буквами Е и С). Значит, Н = 1, Я = 7, а в числе ЛЁН цифра Ё = 0. Таким образом, ЛЁНЯ = 2017.

3. Наклейки. У одноклассниц Маши и Светы одинаковое количество тетрадей. Они купили одинаковые наборы наклеек с котиками. Маша наклеила на 7 тетрадей по одному котику, а на остальные – по 7 котиков. Света наклеила на 11 тетрадей по одному котику, а на остальные – по 11 котиков. Сколько котиков было в наборе, если каждая девочка израсходовала весь набор?

Фольклор

Ответ: 77.

Решение. Пусть у каждой девочки – x тетрадей. Маша использовала $7 + 7(x – 7)$ наклеек, а Света – $11 + 11(x – 11)$ наклеек. Так как все наклейки использованы, то $7 + 7(x – 7) = 11 + 11(x – 11)$. Решая это уравнение, получим: $x = 17$. Значит, в каждом наборе было $7 + 7(17 – 7) = 77$ наклеек.

4. Кто падал? Антон, Боря и Вова участвовали в велопробеге по шоссе Каргополь – Медвежьегорск. Они стартовали в разное время и каждый ехал с постоянной скоростью: Антон – быстрее Бори, а Боря – быстрее Вовы. В некоторых точках шоссе были установлены видеокамеры. Каждая из них фиксировала порядок прохождения участниками этой точки. Оказалось, что любой порядок, в котором могли проехать Антон, Боря и Вова, был реализован в какой-то из точек. Известно, что кто-то один из троих падал. Кто именно?

М. Хачатурян, Н. Медведь

Ответ: Антон.

Решение. Перечислим все возможные случаи прохождения точек в различном порядке: АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ и ВБА. Для того, чтобы одна из этих ситуаций поменялась на другую, необходим обгон.

Предположим, что Антон не падал. Но после того, как он первый раз оказался между Борей и Вовой, Боря и Вова уже не могли поменяться местами (даже если кто-то из них падал), так как Антон – самый быстрый из троих. Значит, могла реализоваться только одна из двух ситуаций: ВАБ или БАВ. Это противоречие показывает, что Антон наверняка падал.

От школьников не требуется приводить пример, показывающий, что при падении Антона все возможные ситуации реализуются,

5. Скалолазочка. В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменок соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки – произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья – 5, Сол – 12, Джессика – 24, Акийо – 54, Михо – 64, Петра – 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

М. Илюхина

Ответ: 1 – Сол, 2 – Джессика, 3 – Петра, 4 – Михо, 5 – Янья, 6 – Акийо.

Решение. У Яньи произведение занятых мест равно 5, значит, она заняла два первых места и одно пятое. Так как первая дисциплина у нее самая слабая, то именно в ней она заняла пятое место. У Петры произведение занятых мест равно $75 = 3{\cdot}5^2$, значит, она заняла два пятых места и одно третье. В первой дисциплине она не могла занять пятое место (оно занято Яньей), значит, она была третьей.

Произведение мест, занятых Михо, равно $64 = 4^3$, значит, она каждый раз занимала четвёртое место. Произведение мест, занятых Акийо, равно $54 = 3^2{\cdot}6$, значит, она заняла два третьих места и одно шестое. Так как третье место в первой дисциплине заняла Петра, то Акийо заняла шестое.

Таким образом, пока не зафиксированы: в первой дисциплине – первое и второе место, во второй дисциплине – второе и шестое, в третьей – также второе и шестое. Из условия задачи следует, что Сол заняла первое, второе и шестое места, а Джессика – два вторых и одно шестое. Следовательно, в первой дисциплине Сол заняла первое место, а Джессика – второе.

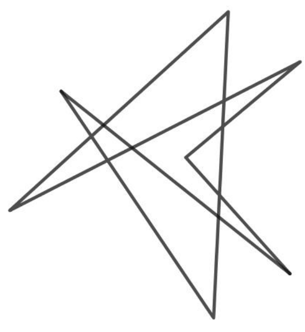
Отметим, что в реальной жизни было в точности так, как в условии задачи.

6. Ломаная. Маша нарисовала замкнутую семизвенную ломаную. Для каждого звена она записала, со сколькими звеньями оно пересекается во внутренних точках. Могла ли она записать в каком-нибудь порядке числа 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1? (*Любые два звена ломаной, не являющиеся соседними, либо пересекаются во внутренней точке, либо не имеют общих точек.*)

Д. Калинин, вариация фольклора

Ответ: да.

Решение. Например, см. рисунок..



7. Волшебный квадрат. Клетки квадрата размером 3×3 заполнили цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, и подсчитали сумму чисел в каждой строке и в каждом столбце. Какое наибольшее количество идущих подряд целых чисел может быть среди этих сумм?

М. Евдокимов

Ответ: пять.

Решение. Приведем пример, в котором пять из шести сумм – последовательные целые числа (см. таблицу).

4	9	3	16
2	5	8	15
7	1	6	14
13	15	17	

Докажем, что шесть сумм не могут быть числами, идущими подряд. Пусть это не так и все суммы – последовательные числа. Тогда сумма этих чисел нечётна (так как среди них – три чётных числа и три нечётных). Но если сложить суммы чисел во всех строках и во всех столбцах, то получится удвоенная сумма всех чисел, записанных в таблице, то есть чётное число. Противоречие.

8. Гири. Перед Петей выставили в ряд пять гирь. Ему известно, что это гири массами 19 г, 20 г, 20 г, 20 г, 21 г, стоящие в каком-то порядке, при этом гири массами 19 г и 21 г стоят рядом. У Пети есть электронные весы, которые показывают массу положенного на них груза. Помогите Пете за два взвешивания определить массу каждой гири.

Кубок Урала 2015, личная олимпиада 5 класса

Решение. Пронумеруем гири слева направо. Взвесим сначала ***первую*** и ***третью*** гири, а затем – ***первую*** и ***четвёртую***. Рассмотрим возможные результаты этих взвешиваний. Заметим, что хотя бы одна из гирь, участвующих в первом взвешивании, имеет массу 20 г. Тогда возможны три случая показания весов при первом взвешивании.

1) Весы показали 40 г. Значит, гири с номерами 1, 2 и 3 весят по 20 г, а гири с номерами 4 и 5 – 19 г и 21 г (в каком-то порядке). Тогда вторым взвешиванием этот порядок определится.

2) Весы показали 41 г. Значит, гири с номерами 1 и 3 весят 20 г и 21 г (в каком-то порядке). При втором взвешивании: если получим 41 г, то гиря №1 весит 21 г, а гиря №2, лежащая рядом, – 19 г; если получим 40 г, то первая и четвёртая гири весят по 20 г, тогда гиря №3 весит 21 г, а гиря №2 – 19 г; если получим 39 г, то гиря №4 весит 19 г, гиря №3 – 21 г.

3) Весы показали 39 г. Значит, гири с номерами 1 и 3 весят 20 г и 19 г (в каком-то порядке). При втором взвешивании: если получим 41 г, то гиря №4 весит 21 г , тогда гиря №3 – 19 г; если получим 40 г, то гири с номерами 1 и 4 весят по 20 г, значит гиря №3 весит 19 г, а гиря №2 – 21 г; если получим 39 г, то гиря №1 весит 19 г, а гиря №2 – 21 г.

9. Игра с параллелепипедами. В начале игры имеется набор из 2019 прямоугольных параллелепипедов размером $1\times1\times2$. За один ход игрок может выбрать два имеющихся параллелепипеда и склеить их по грани в один параллелепипед. Кто не сможет сделать ход – проиграл. Играют двое. Кто из них сможет выиграть, независимо от того, как будет играть соперник?

Кубок Урала 2015, вариация

Ответ: первый.

Решение. Параллелепипед размером$1\times1\times2n$, где $n \geq 2$, будем называть «колбасой», а параллелепипед размером $1\times2\times m$, где $m \geq 2$, будем называть «лепёшкой». Первый игрок стремится сделать так, чтобы к концу игры остались одна «колбаса» и одна «лепёшка». В этом случае будет сделано 2017 ходов, то есть последний ход сделает первый игрок, который и победит.

1) Первым ходом первый игрок делает «колбасу» $1\times1\times4$.

2) Далее, если второй игрок делает новую «колбасу», то первый присоединяет её к имеющейся. Если второй увеличивает имеющеюся «колбасу», то первый также увеличивает «колбасу».

3) Если второй игрок делает «лепёшку» $1\times2\times2$, то первый дополняет её до параллелепипеда размером $1\times2\times3$. Далее, если второй делает новую «лепёшку», то первый её присоединяет к уже имеющейся. Если второй увеличивает имеющуюся, то первый также её увеличивает.

Заметим, что «лепёшка» будет иметь размер с нечётным m, а «колбаса» будет иметь размер, в котором $n > 2$. Поэтому, «колбасу» невозможно присоединить к «лепёшке».

Если второй не создает «лепёшек», то первый должен создать её сам. Когда «колбаса» станет достаточно большой (например, после 2000 ходов), то никакую возникшую «лепёшку» к ней не присоединить. Пусть первый сделает «лепёшку» $1\times2\times2$, а далее действует так, как в пункте 3).

Вариант составили Э. Акопян, С. Васянини, Д. Калинин.