**XVII Устная математическая олимпиада для 6 – 7 классов**
**24.03.2019**
**7 класс**

**1. Распил.** Столяр распилил шахматную доску на клетки за 70 минут. За какое время он распилит такую же доску на квадраты размером 2×2 клетки? (*Размеры шахматной доски – 8×8 клеток. Время распила пропорционально его длине*.)

*Д. Трущин*

**Ответ**: за 30 минут.

**Решение**. При распиливании доски на 64 клетки было сделано семь вертикальных распилов по восемь клеток и столько же горизонтальных. Итого: $7 \cdot 8 \cdot 2$ единичных распилов. При распиливании на указанные квадраты потребуется сделать три вертикальных распила по восемь клеток и столько же горизонтальных, то есть $3 \cdot 8 \cdot 2$ единичных распилов.

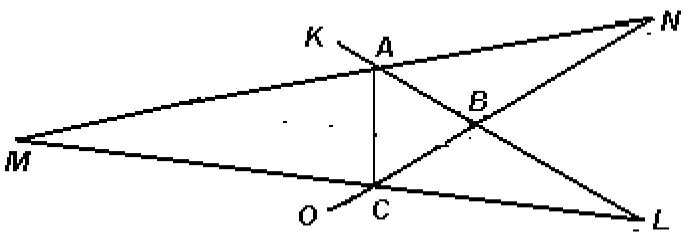
Пусть $t$ минут – искомое время. Тогда $\frac{t}{70} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 2}{7 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{3}{7}$, откуда $t = 30$.

**2. Ломаная.** Дан равносторонний треугольник. Существует ли четырехзвенная ломаная, вершины которой не совпадают с вершинами данного треугольника, и которая через каждую вершину этого треугольника проходит дважды?

*Д. Трущин*

**Ответ**: существует.

**Решение**. Например, см. рисунок: $ABC$ – данный равносторонний треугольник, $KLMNO$ – искомая ломаная.




**3. Покупки.** В магазине «Всё для путешествий» продаются 20 плееров по цене от 500 до 800 рублей и 20 наушников по цене от 50 до 140 рублей. Известно, что любой один предмет стоит целое число рублей и никакие два не стоят одинаково. Докажите, что два покупателя смогут приобрести по одному плееру с наушниками, потратив одинаковое количество денег.

*Олимпиада Baltic Way,1991*

**Решение**. Заметим, что всего различных ценников в магазине может быть (800 – 500 + 1) + (140 – 50 + 1) = 392. А всевозможных пар «плеер-наушники» – $20 \cdot 20 = 400$. Значит, по принципу Дирихле, найдутся две разные пары с одинаковой суммарной стоимостью. Однако, если в этих парах какой-то предмет будет одним и тем же, то оставшиеся предметы стоят поровну, поэтому тоже одинаковые. Следовательно, найдутся две пары, которые смогут купить два разных покупателя.

**4. Скалолазочка.** В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменок соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки – произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья – 5, Сол – 12, Джессика – 24, Акийо – 54, Михо – 64, Петра – 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

*М. Илюхина*

**Ответ**: 1 – Сол, 2 – Джессика, 3 – Петра, 4 – Михо, 5 – Янья, 6 – Акийо.

**Решение**. У Яньи произведение занятых мест равно 5, значит, она заняла два первых места и одно пятое. Так как первая дисциплина у нее самая слабая, то именно в ней она заняла пятое место. У Петры произведение занятых мест равно $75 = 3 \cdot 5^2$, значит, она заняла два пятых места и одно третье. В первой дисциплине она не могла занять пятое место (оно занято Яньей), значит, она была третьей.

Произведение мест, занятых Михо, равно 64 = $4^3$, значит, она каждый раз занимала четвёртое место. Произведение мест, занятых Акийо, равно 54 = $3^2 \cdot 6$, значит, она заняла два третьих места и одно шестое. Так как третье место в первой дисциплине заняла Петра, то Акийо заняла шестое.

Таким образом, пока не зафиксированы: в первой дисциплине – первое и второе место, во второй дисциплине – второе и шестое, в третьей – также второе и шестое. Из условия задачи следует, что Сол заняла первое, второе и шестое места, а Джессика – два вторых и одно шестое. Следовательно, в первой дисциплине Сол заняла первое место, а Джессика – второе.

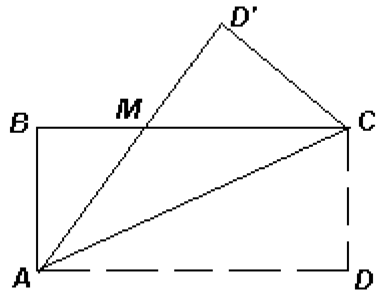
*Отметим, что в реальной жизни было в точности так, как в условии задачи.*

**5. Сгиб.** Прямоугольный лист бумаги согнули по диагонали. Может ли периметр полученного пятиугольника оказаться равным периметру исходного листа?

*Фольклор (в редакции А. Пешнина)*

**Ответ**: не может.

**Решение**. Пусть прямоугольник $ABCD$ согнули по диагонали $AC$ и получили пятиугольник $ABMD'C$ (см. рисунок). Тогда периметр прямоугольника $P_1 = 2(AB + BC)$, а периметр пятиугольника $P_2 = AB + BM + MD' + D'C + CA$.




Рассмотрим и преобразуем разность, учитывая, что $AD' = AD = BC$ и $D'C = DC = AB$: $P_1 - P_2 = (BC - BM) + (AD' - MD') - CA = CM + MA - CA > 0$, так как по неравенству треугольника $CM + MA > CA$. Таким образом, $P_1 > P_2$.

*От школьников можно не требовать строгой формулировки неравенства треугольника. Они, например, имеют право ссылаться на то, что кратчайший путь между двумя точками проходит по прямой.*

**6. Игра.** На доске записано: *** × *** × *** × ***. Играют двое: учитель и ученик. Учитель называет ненулевую цифру, а ученик ставит ее вместо одной из звёздочек, причем учитель видит, куда именно. Ученик хочет, чтобы после двенадцати пар ходов произведение четырёх получившихся трёхзначных чисел делилось на 9. Сможет ли он этого добиться независимо от того, какие цифры назовет учитель?

*Олимпиада Санкт-Петербурга, 2012*

**Ответ**: сможет.

**Решение**. Указанное произведение будет делится на 9, если хотя бы два трёхзначных числа будут кратны трём. Следовательно, ученик должен добиться, чтобы хотя бы у двух трёхзначных чисел сумма цифр была кратна трём. Для этого он может распределять цифры по группам в зависимости от их остатка при делении на 3. Например, в первую группу вместо звёздочек записывать цифры, имеющие при делении на 3 остаток 1, во вторую – имеющие остаток 2, в третью – имеющие остаток 0. Если какая-то из этих групп уже заполнена, то цифра записывается в четвёртую группу.

После седьмого хода ученика одна из первых трёх групп будет заполнена. Рассмотрим теперь ситуацию после десятого хода ученика. Если заполнилась еще хотя бы одна из первых трёх групп, то его цель достигнута. В противном случае четвёртая группа оказывается заполнена цифрами, имеющими одинаковый остаток при делении на 3. Следовательно, число образовавшееся в этой группе делится на 3.

Таким образом, не позже, чем после десятого хода ученика, образуются хотя бы два трёхзначных числа, кратные трём. Оставшиеся цифры ученик может расставлять произвольно.

**7. Обед.** Два математика решили пообедать в кафе. Общая стоимость их заказов составила 770 рублей. Первый математик сказал: «Суммарное количество блюд, которые мы заказали, – простое число». Второй математик ответил: «Если ты такой умный, то я отдам тебе пряник стоимостью 64 рубля и после этого средняя стоимость блюд у каждого из нас увеличится на один рубль». Сколько рублей потратил каждый из них на свой заказ?

*Бельгийская олимпиада (в редакции А. Ламтюгина)*

**Ответ**. первый потратил 122 рубля, а второй – 648 рублей.

**Решение**. Пусть $S_1$ и $S_2$ – средние стоимости блюд первоначального заказа, а $n_1$ и $n_2$ – количество блюд в заказах первого и второго математиков соответственно. Тогда общая стоимость заказа первого математика равна $S_1n_1$, а второго – $S_2n_2$.По условию задачи можно составить три уравнения:

(1) $S_1n_1 + 64 = (S_1 + 1)(n_1 + 1)$; (2) $S_2n_2 - 64 = (S_2 + 1)(n_2 - 1)$; (3) $S_1n_1 + S_2n_2 = 770$.

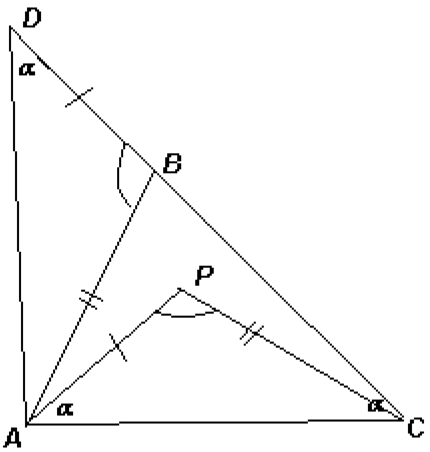
Из (1) следует, что $S_1 = 63 - n_1$, а из (2), что $S_2 = 63 + n_2$. Подставляя эти значения в (3), получим: $63n_1 - n_1^2 + 63n_2 + n_2^2 = 770$. После разложения обеих частей на множители это уравнение примет вид: $(n_1 + n_2)(n_2 - n_1 + 63) = 2\cdot5\cdot7\cdot11$.

По условию, $n_1 + n_2$ – простое число. Если $n_1 + n_2 \le 7$, то $(n_1 + n_2)(n_2 - n_1 + 63) < 7(7 + 63) = 490 < 770$. Значит, $n_1 + n_2 = 11$, тогда $n_2 - n_1 + 63 = 70$, то есть $n_2 - n_1 = 7$. Следовательно, $n_1 = 2$, $n_2 = 9$. Тогда $S_1 = -n_1^2 + 63n_1 = 122$, $S_2 = n_2^2 + 63n_2 = 648$.

*Отметим, что в условии задачи не сказано, что стоимости блюд (кроме пряника) и средние стоимости заказов являются целыми числами. Поэтому любое решение, использующее без обоснования эти факты, нельзя признать верным. Но из равенств $S_1 = 63 - n_1$ и$S_2 = 63 + n_2$ следует, что $S_1$ и $S_2$ – натуральные числа, откуда получим, что числа $S_1n_1$ è $S_2n_2$ – также натуральные. Далее возможно переборное решение, но оно весьма громоздкое.*

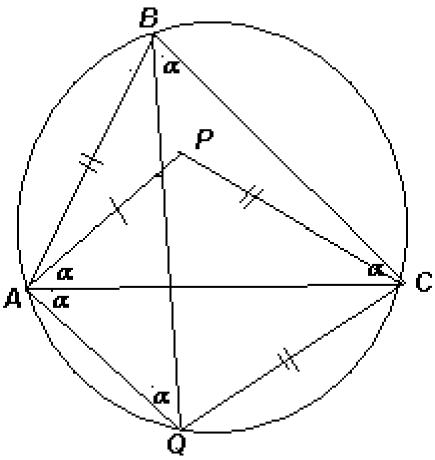
**8. Угол.** Внутри треугольника $ABC$ отмечена точка $P$ так, что сумма углов $ABC$ и $APC$ равна 180° и $CP = AB$. Докажите, что $\angle CAP < 60°$.

*А. Пешнин*




**Решение**. На продолжении стороны $BC$ за точку $B$ отметим точку D так, что $BD = AP$ (см. рисунок). Из условия задачи следует, что $\angle DBA = 180° - \angle ABC = \angle APC$. Тогда треугольник $DBA$ равен треугольнику $APC$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $AD = AC$, то есть треугольник $ADC$ – равнобедренный. Кроме того, $\angle ACD = \angle ADC = \angle CAP = \alpha$. Тогда из треугольника $ADC$ по теореме о сумме углов треугольника получим: $3\alpha + \angle CAP = 180°$, откуда $\alpha < 60°$.

*Для семиклассников, уже знакомых с признаками и свойствами вписанного четырёхугольника, можно предложить другой способ решения.*




*Рассмотрим точку Q, симметричную точке P относительно прямой AC (см. рисунок). Тогда $\angle AQC + \angle ABC = \angle APC + \angle ABC = 180°$, поэтому четырёхугольник ABCQ – вписанный.*

*Так как QC = PC = AB, то ABCQ – равнобедренная трапеция. Следовательно, $\angle ACB = \angle QBC = \angle AQB = \angle CAQ = \angle CAP = \alpha$. Тогда сумма углов ABCQ: $5\alpha + \angle BQC + \angle BAP = 360°$. Так как $\angle BQC = \angle CAB > \alpha$, то $6\alpha < 360°$, то есть $\alpha < 60°$.*

**9. Заполнение квадрата**. Сколькими способами можно заполнить цифрами клетки квадрата размером $3\times3$ так, чтобы в каждой строке и каждом столбце сумма цифр была равна 7, а ненулевые цифры не повторялись?

*Harvard-MIT mathematics tournament, 2019*

**Ответ**. 216 способов.

**Решение**. Первый способ. Заметим, что существует пять разновидностей сумм трех цифр: 0 + 0 + 7 = 7 (1); 0 + 1 + 6 = 7 (2); 0 + 2 + 5 = 7 (3); 0 + 3 + 4 = 7 (4); 1 + 2 + 4 = 7 (5).

Пусть найдутся две строки вида (1). Тогда оставшаяся строка имеет тот же вид. В этом случае таблица может быть заполнена 3! = **6 способами.**

Пусть есть ровно одна строка вида (1). В одном столбце с цифрой 7 должны стоять нули, поэтому оставшиеся строки могут быть только вида (2), (3) или (4). Заметим, что оставшиеся две строки должны быть одного вида. Таким образом, есть три способа выбрать строку вида (1), три способа заполнить ее, три способа выбрать вид остальных строк и два способа расстановок в этих строках. Итого: 3·3·3·2 = **54 способа.**

Далее будем считать, что строк вида (1) нет.

Пусть есть две строки вида (2). Тогда оставшаяся строка имеет такой же вид. Значит, есть шесть способов заполнить первую строку, затем два способа заполнить вторую, а третья строка определяется однозначно. Итого: 6·2 = **12 способов**.

Пусть есть ровно одна строка вида (2). В одном столбце с цифрой 6 могут стоять только 0 и 1. Строка с единицей может быть только вида (5). Тогда мы получим одну из следующих расстановок (с точностью до перестановки строк и столбцов):

0 1 6    0 1 6
4 2 1    2 4 1
3 4 0    5 2 0

Таким образом, есть три способа выбрать положение строки вида (2), шесть способов расставить числа в этой строке, два способа определить положение строки вида (5), два способа расставить числа в этой строке. Итого: 3·6·2·2 = **72 способа**.

Далее будем считать, что строк вида (2) тоже нет.

Пусть найдутся две строки вида (3). Тогда оставшаяся строка имеет тот же вид. Значит, есть шесть способов заполнить первую строку, затем два способа заполнить вторую, а третья строка определяется однозначно. Итого: 6·2 = **12 способов**.

Пусть есть ровно одна строка вида (3). В одном столбце с цифрой 5 могут стоять только 0 и 2. Строка с цифрой 2 должна быть вида (5). Тогда мы получим одну из следующих расстановок (с точностью до перестановки строк и столбцов):

0 2 5    0 2 5
4 1 2    1 4 2
3 4 0    6 1 0

Вторая таблица содержит строку типа 2, что нам не подходит. Значит нас интересует только первая таблица. Таким, образом, есть три способа выбрать положение строки вида (3), шесть способов расставить числа в этой строке, два способа определить положение строки вида (5). Итого: 3·6·2 = **36 способов**.

Далее считаем, что строк вида (3) тоже нет. Тогда есть либо хотя бы две строки вида (4), либо хотя бы две строки вида (5).

В первом случае оставшаяся строка тоже имеет вид (4). Тогда есть шесть способов заполнить первую строку и два способа заполнить вторую. Итого: **12 способов.**

Во втором случае оставшаяся строка тоже имеет вид (5). Тогда есть шесть способов заполнить первую строку и два способа заполнить вторую. Итого **12 способов.**

Таким образом, общее количество способов: 6 + 54 + 12 + 72 + 12 + 36 + 12 + 12 = **216**.

Второй способ. Рассмотрим произвольную сумму трёх цифр, равную 7. Заметим, что в ней ровно одна нечётная цифра (количество нечётных цифр должно быть нечётным, а если их хотя бы три, то их сумма будет не меньше, чем 1 + 3 + 5 > 7). Поэтому в двоичном разложении ровно у одного слагаемого в разряде единиц стоит 1. В разряде четверок 1 стоит также ровно у одного слагаемого. Действительно, если 1 стоит в разряде четвёрок у двух или трёх слагаемых, то сумма будет больше 7. Если же 1 в разряде четвёрок не будет стоять ни у одного слагаемого, то 7 мы сможем получить только суммами 3 + 2 + 2 или 3 + 3 + 1, в которых слагаемые повторяются. Таким образом, и в разряде двоек 1 стоит ровно у одного слагаемого.

Теперь будем заполнять таблицу следующим образом: сначала везде поставим нули. Затем выберем три клетки из разных строк и столбцов и увеличим каждую на 1. Способов это сделать: 3!. Затем выберем три клетки с тем же условием, только в них уже добавим по 2. А затем выберем ещё три, в которые добавим по 4. Итого получим: $(3!)^3$ = **216** способов.

*Вариант составили А. Пешнин, А. Ламтюгин, Д. Трущин.*