8 класс

Первый день

8.1. В выпуклом четырехугольнике семь из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.

8.2. Петя задумал натуральное число и для каждой пары его цифр выписал на доску их разность. После этого он стер некоторые разности, и на доске остались числа 2, 0, 0, 7. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

8.3. Существуют ли такие простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_{2007}$, что $p_1^2 - 1$ делится на p_2, $p_2^2 - 1$ делится на p_3, ..., $p_{2007}^2 - 1$ делится на p_1?

8.4. На шахматной доске расставлены во всех клетках 32 белых и 32 черных пешки. Пешка может бить пешки противоположного цвета, делая ход по диагонали на одну клетку и становясь на место взятой пешки (белые пешки могут бить только вправо-вверх и влево-вверх, а черные — только влево-вниз и вправо-вниз). Другим образом пешки ходить не могут. Какое наименьшее количество пешек может остаться на доске?

8 класс

Второй день

8.5. Среди 11 внешне одинаковых монет 10 настоящих, весящих по 20 г, и одна фальшивая, весящая 21 г. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. (Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая.) Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

8.6. В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N \text{ единиц}}$. Найдите наименьшее возможное значение N.

8.7. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка M таким образом, что $\angle AMC = 2\angle ABC$. На отрезке AM нашлась такая точка K, что $\angle BKM = \angle ABC$. Докажите, что $BK = KM + MC$.

8.8. В классе учится 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?

9 класс

Первый день

9.1. Петя придумал 1004 приведенных квадратных трехчлена $f_1, \ldots, f_{1004}$, среди корней которых встречаются все целые числа от 0 до 2007. Вася рассматривает всевозможные уравнения $f_i = f_j$ $(i \neq j)$, и за каждый найденный у них корень Петя платит Васе по рублю. Каков наименьший возможный доход Васи?

9.2. Существуют ли такие простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_{2007}$, что $p_1^2 - 1$ делится на p_2, $p_2^2 - 1$ делится на p_3, $\ldots$, $p_{2007}^2 - 1$ делится на p_1?

9.3. 25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили забавную закономерность. Если выбрать любую группу не меньше чем из 10 мальчиков, а потом добавить к ним всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в получившейся группе число мальчиков окажется на 1 меньше, чем число девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.

9.4. У двух треугольников равны наибольшие стороны и равны наименьшие углы. Строится новый треугольник со сторонами, равными суммам соответствующих сторон данных треугольников (складываются наибольшие стороны двух треугольников, средние по длине стороны и наименьшие стороны). Докажите, что площадь нового треугольника не меньше удвоенной суммы площадей исходных.

XXXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. Среди 11 внешне одинаковых монет 10 настоящих, весящих по 20 г, и одна фальшивая, весящая 21 г. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. (Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая.) Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

9.6. На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами K и L соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BKD и CLD вторично пересекаются на фиксированной окружности.

9.7. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.

9.8. Среди натуральных чисел от 1 до 1200 выбрали 372 различных числа так, что никакие два из них не различаются на 4, 5 или 9. Докажите, что число 600 является одним из выбранных.

10 класс

Первый день

10.1. В 25 коробках лежат шарики нескольких цветов. Известно, что при любом k ($1 \leqslant k \leqslant 25$) в любых k коробках лежат шарики ровно $k+1$ различных цветов. Докажите, что шарики одного из цветов лежат во всех коробках.

10.2. Для вещественных $x > y > 0$ и натуральных $n > k$ докажите неравенство $(x^k - y^k)^n < (x^n - y^n)^k$.

10.3. При каком наименьшем n для любого набора $\mathbf{A}$ из 2007 множеств найдется такой набор $\mathbf{B}$ из n множеств, что каждое множество набора $\mathbf{A}$ является пересечением двух различных множеств набора $\mathbf{B}$?

10.4. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O. Пусть M и N — центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ADE и ODE. Докажите, что середина меньшей дуги DE лежат на прямой MN.

10 класс

Второй день

10.5. В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N \text{ единиц}}$. Найдите наименьшее возможное значение N.

10.6. Точка D на стороне BC треугольника ABC такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы окружностей, вневписанных в треугольники ABD и ACD, касающихся соответственно отрезков BD и CD, также равны.

10.7. Дано натуральное число $n > 6$. Рассматриваются натуральные числа, лежащие в промежутке $(n(n-1); n^2)$ и взаимно простые с $n(n-1)$. Докажите, что наибольший общий делитель всех таких чисел равен 1.

10.8. В клетках таблицы 15×15 изначально записаны нули. За один ход разрешается выбрать любой ее столбец или любую строку, стереть записанные там числа и записать туда все числа от 1 до 15 в произвольном порядке — по одному в каждую клетку. Какую максимальную сумму чисел в таблице можно получить такими ходами?

11 класс

Первый день

11.1. В 25 коробках лежат шарики нескольких цветов. Известно, что при любом k ($1 \leqslant k \leqslant 25$) в любых k коробках лежат шарики ровно $k+1$ различных цветов. Докажите, что шарики одного из цветов лежат во всех коробках.

11.2. Квадратные трехчлены $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таковы, что
$$f_1'(x)f_2'(x) \geqslant |f_1(x)| + |f_2(x)|$$
при всех действительных x. Докажите, что произведение $f_1(x)f_2(x)$ равно квадрату некоторого трехчлена.

11.3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM, а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM. Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

11.4. На столе лежат купюры достоинством $1, 2, \ldots, 2n$ тугриков. Двое ходят по очереди. Каждым ходом игрок снимает со стола две купюры, бóльшую отдает сопернику, а меньшую забирает себе. Каждый стремится получить как можно больше денег. Сколько тугриков получит начинающий при правильной игре?

11 класс

Второй день

11.5. При каких натуральных n найдутся такие целые a, b, c, что их сумма равна нулю, а число $a^n + b^n + c^n$ — простое?

11.6. На плоскости отмечено несколько точек, каждая покрашена в синий, желтый или зеленый цвет. На любом отрезке, соединяющем одноцветные точки, нет точек этого же цвета, но есть хотя бы одна другого цвета. Каково максимально возможное число всех точек?

11.7. Назовем многогранник *хорошим*, если его объем (измеренный в м^3) численно равен площади его поверхности (измеренной в м^2). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда?

11.8. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство
$$(1+x_1)(1+x_1+x_2)\ldots(1+x_1+x_2+\ldots+x_n) \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(n+1)^{n+1}}\sqrt{x_1x_2\ldots x_n}\,.$$