9 класс

Первый день

9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 + 2a_1x + b_1$, $f_2(x) = x^2 + 2a_2x + b_2$, $f_3(x) = x^2 + 2a_3x + b_3$. Известно, что $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 > 1$. Докажите, что хотя бы один из этих трёхчленов имеет два корня.

9.2. Семь лыжников с номерами $1, 2, \ldots, 7$ ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов.

9.3. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

9.4. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1, лежит на стороне BC.

XXXVI Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 + 2a_1x + b_1$, $f_2(x) = x^2 + 2a_2x + b_2$, $f_3(x) = x^2 + 2a_3x + b_3$. Известно, что $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 > 1$. Докажите, что хотя бы один из этих трёхчленов имеет два корня.

9.2. Семь лыжников с номерами $1, 2, \ldots, 7$ ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов.

9.3. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

9.4. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1, лежит на стороне BC.

10 класс

Первый день

10.1. Девять лыжников ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Могло ли оказаться, что каждый лыжник участвовал ровно в четырёх обгонах? (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.)

10.2. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

10.3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

10.4. Натуральное число b назовём *удачным*, если для любого натурального a такого, что a^5 делится на b^2, число a^2 делится на b. Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2010.

XXXVI Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Девять лыжников ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Могло ли оказаться, что каждый лыжник участвовал ровно в четырёх обгонах? (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.)

10.2. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

10.3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

10.4. Натуральное число b назовём *удачным*, если для любого натурального a такого, что a^5 делится на b^2, число a^2 делится на b. Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2010.

11 класс

Первый день

11.1. Каждый катет прямоугольного треугольника увеличили на единицу. Могла ли его гипотенуза увеличиться более, чем на $\sqrt{2}$?

11.2. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является чётным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны.

11.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC. Точки K и M — проекции вершин A и C соответственно на прямую BD. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P. Докажите, что угол KPM — прямой.

11.4. Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.

XXXVI Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Каждый катет прямоугольного треугольника увеличили на единицу. Могла ли его гипотенуза увеличиться более, чем на $\sqrt{2}$?

11.2. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является чётным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны.

11.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC. Точки K и M — проекции вершин A и C соответственно на прямую BD. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P. Докажите, что угол KPM — прямой.

11.4. Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.