9 класс

Второй день

9.5. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

9.6. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B. Из точки P, лежащей на прямой b, опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

9.7. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

9.8. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2$, $S_2 = 2 + 3 = 5$, $S_3 = 2 + 3 + 5 = 10$, ... Могут ли два подряд идущих члена последовательности (S_n) оказаться квадратами натуральных чисел?

XXXVI Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

9.6. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B. Из точки P, лежащей на прямой b, опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

9.7. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

9.8. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2$, $S_2 = 2 + 3 = 5$, $S_3 = 2 + 3 + 5 = 10$, ... Могут ли два подряд идущих члена последовательности (S_n) оказаться квадратами натуральных чисел?

10 класс

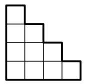
Второй день

10.5. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $ax^2 + bx + c > cx$ при любом x. Докажите, что $cx^2 - bx + a > cx - b$ при любом x.

10.6. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через произвольную точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

10.7. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

10.8. Назовём *лестницей высоты n* фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали (на рисунке показана лестница высоты 4). Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?



XXXVI Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

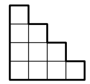
Второй день

10.5. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $ax^2 + bx + c > cx$ при любом x. Докажите, что $cx^2 - bx + a > cx - b$ при любом x.

10.6. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через произвольную точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

10.7. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

10.8. Назовём *лестницей высоты n* фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали (на рисунке показана лестница высоты 4). Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?



11 класс

Второй день

11.5. Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin\alpha > \cos\beta$, $\sin\beta > \cos\gamma$, $\sin\gamma > \cos\alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный.

11.6. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

11.7. Целые числа a, b, c таковы, что значения квадратных трёхчленов $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трёхчлен при $x = 1$ принимать значение 2009?

11.8. В клетки квадрата 100×100 расставили числа 1, 2, ..., 10000, каждое — по одному разу; при этом числа, различающиеся на 1, записаны в соседних по стороне клетках. После этого посчитали расстояния между центрами каждых двух клеток, числа в которых различаются ровно на 5000. Пусть S — минимальное из этих расстояний. Какое наибольшее значение может принимать S?

XXXVI Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin\alpha > \cos\beta$, $\sin\beta > \cos\gamma$, $\sin\gamma > \cos\alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный.

11.6. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

11.7. Целые числа a, b, c таковы, что значения квадратных трёхчленов $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трёхчлен при $x = 1$ принимать значение 2009?

11.8. В клетки квадрата 100×100 расставили числа 1, 2, ..., 10000, каждое — по одному разу; при этом числа, различающиеся на 1, записаны в соседних по стороне клетках. После этого посчитали расстояния между центрами каждых двух клеток, числа в которых различаются ровно на 5000. Пусть S — минимальное из этих расстояний. Какое наибольшее значение может принимать S?