Материалы для проведения заключительного этапа

XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2010–2011 учебный год

Второй день

Великий Новгород, 25–29 апреля 2011 г.

Москва, 2011

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, А.В. Антропов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.С. Голованов, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, С.А. Дориченко, М.А. Евдокимов, Л.А. Емельянов, Р.Н. Карасёв, Д.В. Карпов, П.А. Кожевников, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, В.Б. Мокин, Е.Г. Молчанов, В.А. Омельяненко, А.В. Пастор, Ф.В. Петров, О.К. Подлипский, К.А. Праведников, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, К.А. Сухов, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия задач

9 класс

9.5. Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $2011 \cdot 2010/2$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и ещё ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3? (*И. Богданов*)

9.6. У Пети и Коли в тетрадях записаны по два числа; изначально — это числа 1 и 2 у Пети, 3 и 4 — у Коли. Раз в минуту Петя составляет квадратный трёхчлен $f(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа, а Коля — квадратный трёхчлен $g(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа. Если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет два различных корня, то один из мальчиков заменяет свою пару чисел на эти корни, иначе ничего не происходит. Какое второе число могло оказаться у Пети в тетради в тот момент, когда первое стало равным 5? (*И. Богданов, А. Гарбер*)

9.7. Пусть ABC — правильный треугольник. На его стороне AC выбрана точка T, а на дугах AB и BC его описанной окружности выбраны точки M и N соответственно так, что $MT \parallel BC$ и $NT \parallel AB$. Отрезки AN и MT пересекаются в точке X, а отрезки CM и NT — в точке Y. Докажите, что периметры многоугольников $AXYC$ и $XMBNY$ равны. (*В. Шмаров*)

9.8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовём клетку *красивой*, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой? (*К. Кноп*)

10 класс

10.5. Даны 10 попарно различных чисел. Для каждой пары данных чисел Вася записал у себя в тетради квадрат их разности, а Петя записал у себя в тетради модуль разности их квадратов. Могли ли в тетрадях у мальчиков получиться одинаковые наборы из 45 чисел? (*С. Берлов*)

10.6. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой. (*А. Полянский*)

10.7. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ формулой $x_n = \dfrac{a^n - 1}{b^n - 1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b. (*В. Сендеров*)

10.8. Клетчатый квадрат 2010×2010 разрезан на трёхклеточные уголки. Докажите, что можно в каждом уголке отметить по клетке так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали было поровну отмеченных клеток. (*И. Богданов, О. Подлипский*)

11 класс

11.5. Даны два различных кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с единичными старшими коэффициентами. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$. (*И. Богданов*)

11.6. На столе лежит куча из более, чем n^2 камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берёт Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее n, либо любое кратное n число камней, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи. (*С. Берлов*)

11.7. Для натурального a обозначим через $P(a)$ наибольший простой делитель числа $a^2 + 1$. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a, b, c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$. (*А. Голованов*)

11.8. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

(*М. Кунгожин*)

Решения задач

9 класс

9.5. **Ответ.** Могло.

Пусть в нашем наборе a, b и c чисел, дающих соответственно остатки 0, 1 и 2 при делении на 3. Тогда условие переписывается в виде $\frac{a(a-1)}{2}+bc=\frac{b(b-1)}{2}+ac=\frac{c(c-1)}{2}+ab$, $a+b+c=2011$. Несложно видеть, что этим условиям удовлетворяет, например, набор чисел $a=c=670$, $b=671$, ибо $\frac{671\cdot 670}{2}+670^2=\frac{670\cdot 669}{2}+$ $+670+670^2=\frac{670\cdot 669}{2}+670\cdot 671$.

Замечание. В качестве примера можно привести, например, числа от 1 до 2011.

Нетрудно и полностью решить приведённую систему. Первое уравнение переписывается в виде $(a-b)(a+b-1-2c)=0$ или, с учётом равенства $a+b+c=2011$, $(a-b)(2010-3c)=0$. Итак, либо $a=b$, либо $c=670$. С учётом других аналогичных равенств получаем, что все решения имеют вид $(670,670,671)$, $(670,671,670)$ и $(671,670,670)$.

9.6. **Ответ.** $\frac{14}{5}$.

Первое решение. Будем рядом с каждой парой писать какой-нибудь квадратный трёхчлен, корнями которого являются числа этой пары. Пусть в некоторый момент у мальчиков записаны трёхчлены $p(x)$ и $q(x)$. Тогда они решали уравнение вида $\alpha p(x)=\beta q(x)$, где α,β — какие-то ненулевые числа. Значит, полученные числа — корни трёхчлена $\alpha p(x)-\beta q(x)$. Если теперь один из мальчиков заменяет свои числа на эти корни, то можно считать, что рядом с ними будет записан трёхчлен $\alpha p(x)-\beta q(x)$.

Обозначим исходные два трёхчлена $p_0(x)=(x-1)(x-2)$ и $q_0(x)=(x-3)(x-4)$. Из сказанного выше теперь следует, что на каждом шаге у каждого мальчика написан трёхчлен вида $\alpha p_0(x)+\beta q_0(x)$.

Итак, если на Петином листке написано число 5, то у него записан трёхчлен $a(x-5)(x-x_2)=\alpha(x-1)(x-2)+\beta(x-3)(x-4)$.

Подставляя $x = 5$, получаем $12\alpha + 2\beta = 0$, откуда $\alpha(x-1)(x-2) + \beta(x-3)(x-4) = \alpha(-5x^2+39x-70) = -\alpha(x-5)(5x-14)$. Значит, второе число равно $x_2 = \frac{14}{5}$.

Второе решение. Будем вычитать из каждого из чисел в тетрадях по $\frac{5}{2}$. Иначе говоря, мы вводим новую переменную $t = x - \frac{5}{2}$. Тогда первоначальные числа в тетрадях станут равны $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ у Пети и $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ у Васи, а трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ заменятся на некоторые трёхчлены $F(t)$ и $G(t)$.

Покажем, что теперь произведение пары чисел в любой тетради будет всегда равно $\frac{3}{4}$. Это выполнено в начальный момент времени. Пусть это верно перед очередной заменой. Согласно теореме Виета, имеем $F(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1$, где $\frac{c_1}{a_1} = \frac{3}{4}$, и $G(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2$, где $\frac{c_2}{a_2} = \frac{3}{4}$. Новая пара чисел t_1 и t_2 — это пара корней уравнения $F(t) = G(t)$, то есть $(a_1 - a_2)t^2 + (b_1 - b_2)t + (c_1 - c_2) = 0$. Опять по теореме Виета получаем

$$t_1t_2 = \frac{c_1 - c_2}{a_1 - a_2} = \frac{\frac{3}{4}\,a_1 - \frac{3}{4}\,a_2}{a_1 - a_2} = \frac{3}{4}\,,$$

что и требовалось доказать.

Итак, если в некоторый момент одно из Петиных чисел равно $t_1 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$, то второе есть $t_2 = \frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \frac{3}{10}$, откуда $x_2 = \frac{3}{10} + \frac{5}{2} = \frac{14}{5}$.

Замечание. Описанную ситуацию можно получить даже за один ход, если, например, Петя запишет трёхчлен $x^2 - 3x + 2$, а Вася — трёхчлен $6x^2 - 42x + 72$.

9.7. **Первое решение.** Пусть ℓ — касательная к описанной окружности в точке B, а P и Q — точки пересечения ℓ с лучами TM и TN соответственно. Обозначим через K и L соответственно точки, в которых лучи TM и TN пересекают стороны треугольника (см. рис. 1).

Заметим, что четырёхугольники $ABQT$ и $BCTP$ — параллелограммы, откуда $AT = BQ$, $CT = BP$. Далее, из параллельности имеем $\angle KPB = \angle PBK = \angle LTC = 60^\circ$, то есть треугольники BPK и CLT — равносторонние. Поскольку $BP = CT$, эти треугольники равны. Далее, из вписанности имеем $\angle KBM = \angle ABM = \angle ACM = \angle TCY$; значит, точки M и Y — соответственные в этих треугольниках, откуда $BM = CY$ и $PM = LY$. Аналогично, $BN = AX$ и $QN = KX$.

Итак, имеем $XM + YN = KX + KM + LY + LN = QN + KM + PM + LN = QL + KP$. Но $QL = BQ = AT$, а $KP = BP = CT$. Значит, $XM + YN = AT + CT = AC$.

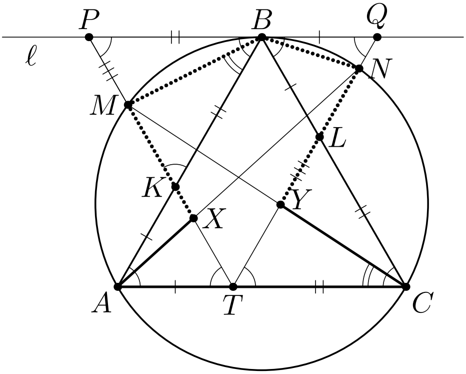

Рис. 1

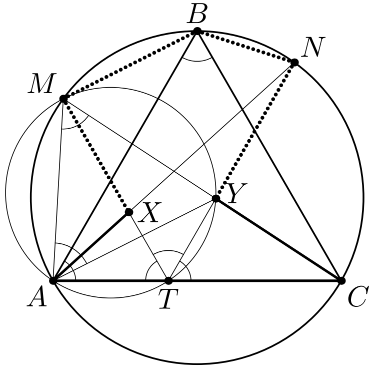

Рис. 2

Итого, получаем $P_{XMBNY} = (XM + YN) + BM + BN + XY = AC + CY + AX + XY = P_{AXYC}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Докажем следующую известную лемму.

Лемма. *Пусть PQR — правильный треугольник, и на меньшей дуге PR его описанной окружности выбрана точка W. Тогда $PW + RW = QW$.*

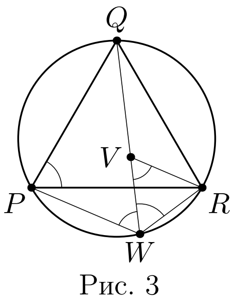

Рис. 3

Доказательство. Отметим на отрезке QW точку V такую, что $VW = WR$ (см. рис. 3). Имеем $\angle VWR = \angle QPR = 60^\circ$, значит, треугольник RVW — правильный. Далее, $RQ = RP$, $RV = RW$ и $\angle PRW = 60^\circ - \angle VRP = \angle QRV$, значит, треугольники RVQ и RWP равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $QV = PW$ и $QW = QV + VW = PW + RW$. Лемма доказана. □

Перейдём к решению задачи. Из параллельности имеем $\angle ATX = \angle XTY = \angle CTY = 60^\circ$. Кроме того, $\angle AMY = \angle ABC = 60^\circ$. Тогда $\angle AMY + \angle ATY = 180^\circ$, значит, точки A, M, Y, T лежат на одной окружности (см. рис. 2).

Далее, $\angle MAY = \angle MTY = 60^\circ$, значит, треугольник MAY — правильный (два из его углов равны по 60°), T — точка на дуге AY его описанной окружности. Тогда по лемме $AT+TY = MX+TX$. Аналогично, $CT+TX = NY+TY$. Складывая эти два равенства, получаем $AC = AT+TC = MX+NY$.

Для треугольника ABC и точки M по лемме получаем $AM + MB = MY + YC$; поскольку $AM = MY$, получаем $CY = MB$. Аналогично, $AX = BN$.

В итоге, $P_{AXYC} = AC + AX + CY + XY = (MX + NY) + BN + BM + XY = P_{XMBNY}$, что и требовалось доказать.

9.8. **Ответ.** Не может.

Лемма. *Для любой клетки доски X существует множество S, состоящее из чётного количество клеток и содержащее X, такое, что у каждой клетки доски чётное число соседей лежит в S.*

Доказательство. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке; можно считать, что X — чёрная. Для начала рассмотрим одну из диагоналей, проходящих через X; пусть A и B — центры двух крайних клеток этой диагонали, а C и D — точки, симметричные им относительно центра доски. Тогда обозначим через S множество всех чёрных клеток, центры которых лежат внутри или на границе прямоугольника $ABCD$. На рис. 4 показаны возможные виды множества S на доске 8×8 (прямоугольники $ABCD$ обозначены пунктиром).

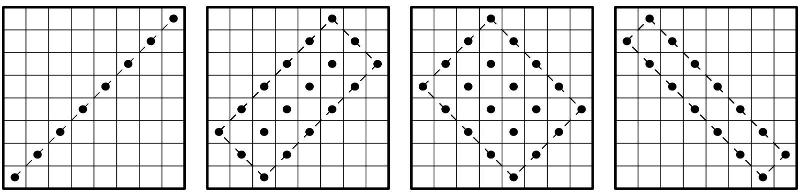

Рис. 4

Множество S состоит из чётного числа клеток, поскольку количества центров клеток на сторонах AB и AD имеют разную чётность. Далее, чёрные клетки не имеют соседей в S, каждая белая клетка внутри $ABCD$ граничит с четырьмя клетками из S, а каждая белая клетка вне него — либо с нулём, либо с двумя клетками из S. Итак, множество S удовлетворяет всем условиям. $\square$

Перейдём к решению задачи. Предположим, что существует ровно одна красивая клетка X. Рассмотрим для этой клетки множество S из леммы. Для каждой клетки этого множества посчитаем количество фишек в соседних с ней клетках; пусть g — сумма всех этих количеств. С одной стороны, в S чётное число клеток, из которых ровно одна красива, а все остальные — нет; поэтому сумма g нечётна. С другой стороны, каждая клетка с фишкой имеет чётное число соседей в S, поэтому она даёт чётный вклад в g; значит, и g должна быть чётной. Противоречие.

10 класс

10.5. **Ответ.** Не могли.

Предположим противное. Если среди исходных чисел есть ноль, то для любого другого числа a имеем $a^2 - 0^2 = (a-0)^2$. Значит, если вычеркнуть ноль, то останутся 9 чисел, также удовлетворяющих условию.

Итак, можно считать, что исходных чисел 9 или 10, и все они ненулевые. Пусть среди них есть числа разных знаков; рассмотрим минимальное и максимальное из них — обозначим их $a < 0 < b$. Тогда у Васи присутствует число $(b-a)^2$, которое больше как a^2, так и b^2; у Пети же любое число не превосходит $\max(a^2, b^2)$. Противоречие.

Значит, все исходные числа — одного знака; заменив, если надо, все числа на противоположные, можно считать, что все они положительны. Опять обозначив через a и b соответственно минимальное и максимальное из этих чисел, имеем $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) > (a-b)^2 \geqslant (c-d)^2$, где c и d — произвольные два исходных числа. Тогда число $b^2 - a^2$ не встретится на листке у Пети, но встретится у Васи — противоречие.

10.6. Точки B_1 и C_1 лежат на окружности, построенной на BC как на диаметре. Для решения достаточно доказать, что F также лежит на этой окружности, то есть достаточно доказать, что четырёхугольник CB_1FC_1 — вписанный.

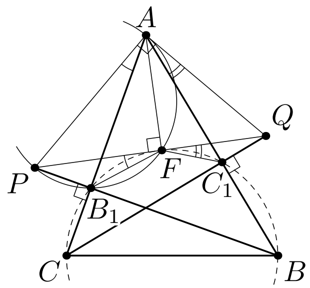

Рис. 5

Так как $\angle AB_1P = \angle AFP = 90^\circ$, то точки B_1 и F лежат на окружности, построенной на AP как на диаметре. Поэтому $\angle PFB_1 = \angle PAB_1$. Аналогично $\angle QFC_1 = \angle QAC_1$. Имеем $\angle B_1FC_1 = 180^\circ - \angle PFB_1 - \angle QFC_1 = 180^\circ - \angle PAB_1 - \angle QAC_1 = 180^\circ - (\angle PAQ - \angle B_1AC_1) = 90^\circ + \angle B_1AC_1 = 90^\circ + (90^\circ - \angle ACC_1) = 180^\circ - \angle B_1CC_1$. Таким образом, четырёхугольник CB_1FC_1 — вписанный.

10.7. **Ответ.** 2.

При $a = 4$, $b = 2$ имеем $\dfrac{a^1 - 1}{b^1 - 1} = 3$, $\dfrac{a^2 - 1}{b^2 - 1} = 5$. Осталось показать, что больше двух простых чисел подряд не встретится.

Докажем более сильное, чем требуется, утверждение: при $n \geqslant 2$ хотя бы одно из чисел $\dfrac{a^n - 1}{b^n - 1}$, $\dfrac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1}$ не является простым. Предположим противное; тогда

$$(a-1)(a^{n-1} + \ldots + a + 1) = p(b-1)(b^{n-1} + \ldots + b + 1), \quad (1)$$

$$(a-1)(a^{n} + \ldots + a + 1) = q(b-1)(b^{n} + \ldots + b + 1), \quad (2)$$

где p и q — простые числа.

Предположим, что $a-1$ не делится на $b-1$. Тогда некоторое простое число r входит в разложение числа $b-1$ в степени большей, чем в $a-1$. Из (1) и (2) получим что r — общий делитель чисел $a^{n-1} + \ldots + a + 1$ и $a^n + \ldots + a + 1$, но

$$\text{НОД}(a^{n-1} + \ldots + a + 1, a^n + \ldots + a + 1) = \text{НОД}(a^{n-1} + \ldots + a + 1, a^n) = 1.$$

Противоречие.

Итак, число $k = \frac{a-1}{b-1}$ целое. Из (1) имеем

$$k(a^{n-1} + \ldots + a + 1) = p(b^{n-1} + \ldots + b + 1),$$

причем $1 < k < p$, так как $b^{n-1} + \ldots + b + 1 < a^{n-1} + \ldots + a + 1$. Значит, НОД$(k, p) = 1$, поэтому $b^{n-1} + \ldots + b + 1 \,\vdots\, k$. Аналогично, из (2) вытекает, что $k < q$ и $b^n + \ldots + b + 1 \,\vdots\, k$. Но это противоречит тому, что НОД$(b^{n-1} + \ldots + b + 1, b^n + \ldots + b + 1) = 1$.

Замечание. Двумя последовательными простыми чисел в такой последовательности могут быть любые два простых числа вида $p = b + 1$, $q = b^2 + 1$. Действительно, полагая $a = b^2$, имеем $p = \frac{a-1}{b-1}$, $q = \frac{a^2-1}{b^2-1}$. Такими парами являются, например, $(7, 37)$, $(11, 101)$ и $(2^{2^3} + 1, 2^{2^4} + 1)$.

10.8. Обозначим $n = 2010/3 = 670$. Назовём *линией* строку или столбец; пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы — слева направо. Заметим, что для выполнения условий задачи достаточно, чтобы при любом k в левых k столбцах и в верхних k строках содержалось бы по kn отмеченных клеток.

Скажем, что уголок *смотрит из i-й вертикали влево*, если две его клетки находятся в i-й вертикали, а третья — левее. Аналогично определим взгляд в других трёх направлениях; каждый уголок, таким образом, смотрит в двух направлениях.

Отметим для начала в каждом уголке среднюю клетку. Теперь в каждом уголке можно либо оставить клетку на месте, либо сдвинуть её ровно в одном из двух направлений, в которые этот уголок смотрит. Выясним, сколько таких сдвигов надо сделать.

Наложим дополнительное условие: между каждыми двумя соседними линиями все сдвиги должны идти в одну сторону. Рассмотрим, скажем, два соседних столбца: k-й и $(k+1)$-й. Предположим, что в левых k столбцах сейчас содержится $d_k \geqslant nk$ отмеченных клеток. Далее, пусть в k-м столбце есть a_k уголков, смотрящих вправо, в а $(k+1)$-м — b_k уголков, смотрящих влево. Тогда в первых k столбцах находится $\frac{3kn - 2a_k - b_k}{3}$ целых уголков, и потому $d_k = \frac{3kn - 2a_k - b_k}{3} + a_k = kn + \frac{a_k - b_k}{3}$. Значит, чтобы добиться нужного количества отмеченных, надо сдвинуть $s_k = \dfrac{a_k - b_k}{3} \leqslant \dfrac{a_k}{3}$ отмеченных клеток из k-го столбца вправо. В этом случае выделим $s_k = \dfrac{a_k - b_k}{3}$ непересекающихся пар среди a_k уголков, смотрящих из k-го столбца вправо, и потребуем, чтобы ровно в одном уголке из каждой пары клетка был сдвинута вправо. Аналогично, если $d_k < nk$, то мы выделим $\dfrac{b_k - a_k}{3}$ непересекающихся пар среди b_k уголков, смотрящих из $(k+1)$-го столбца влево.

Проделав такую операцию с каждой парой соседних линий, мы получим некоторое количество выделенных пар уголков, в каждой из которых надо выбрать по уголку; при этом все выбранные уголки должны быть различными. Осталось показать, что это возможно.

Соединим два уголка, находящиеся в одной паре, ребром. Заметим, что каждый уголок лежит не более, чем в двух парах: по одной на два направления, в которых он смотрит. Значит, мы получим граф, в котором из каждой вершины выходит не более двух рёбер. Тогда этот граф распадается на циклы и пути. Теперь в каждом цикле $U_1 - U_2 - \ldots - U_n - U_1$ в паре (U_i, U_{i+1}) выберем уголок U_i, а в паре (U_n, U_1) — уголок U_n. Аналогичную операцию проделаем с путём. Очевидно, что все условия выполнены — а значит, и задача решена.

11 класс

11.5. Заметим, что у многочленов $F(x)$ и $G(x)$ не более, чем по три корня, а у многочлена $F(x) - G(x)$ (имеющего степень, не превосходящую 2) не больше двух корней. Поскольку у них в совокупности 8 корней, то у $F(x)$ и $G(x)$ ровно по три корня, а у $F(x) - G(x)$ ровно два, причём все они имеют кратность 1.

Предположим, что утверждение задачи неверно; пусть a и b — минимальное и максимальное из выписанных чисел, и $F(a) = F(b) = 0$. Поскольку все корни $G(x)$ лежат на интервале (a, b), имеем $G(a) < 0$, $G(b) > 0$. С другой стороны, квадратный трёхчлен $F(x) - G(x)$ имеет два корня на этом интервале, поэтому значения $F(a)-G(a) = -G(a)$ и $F(b)-G(b) = -G(b)$ должны иметь одинаковый знак. Противоречие.

11.6. Предположим противное: Вася может всегда действовать так, чтобы помешать Пете; поскольку в любой ситуации, кроме конечной, можно сделать ход, это означает, что у Васи есть стратегия, поволяющая ему гарантированно взять последний камень. Пусть d — изначальное количество камней, а r — остаток от деления d на n. Ясно, что $r \neq 0$, иначе Петя может сразу взять все камни.

Петя после первого своего хода может, взяв кратное n количество камней, оставить любое количество вида $a_k = r + nk$, где $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ (все эти количества меньше n^2). Пусть c_k — ответный ход в Васиной стратегии при a_k камнях в куче. Тогда c_k не делится на n, иначе после его хода остаётся $r + n\left(k - \frac{c_k}{n}\right)$ камней, и Петя может выиграть, действуя по Васиной стратегии для этого числа. Значит, $c_k < n$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, а тогда два из этих чисел совпадают, скажем, $c_k = c_\ell$ при $0 \leqslant k < \ell \leqslant n - 1$. Напомним, что у Васи есть стратегия выигрыша в ситуации, когда в куче $a_k - c_k$ камней и ход Пети.

Пусть теперь Петя первым ходом оставит a_ℓ камней; Вася в ответ возьмёт c_ℓ камней. Теперь Петя может взять $n(\ell - k)$ камней, оставляя $a_\ell - c_\ell - n(\ell - k) = a_k - c_k$, и дальше действовать по вышеупомянутой Васиной стратегии. Таким образом, он выиграет — противоречие.

11.7. Сделаем сначала замечание, общее для всех трёх решений. Пусть p — нечётное простое число, а $a < p$ — натуральное число такое, что $a^2 + 1 \,\vdots\, p$; тогда числа a и $p - a$ различны, и $P(a) = P(p - a) = p$. Действительно, числа $a^2 + 1$ и $(p - a)^2 + 1 = (a^2 + 1) + p(p - 2a)$ делятся на p и меньше p^2; значит, они не могут делиться на простые числа, бóльшие p.

Первое решение. Предположим противное. Тогда существует лишь конечное число простых чисел p, для которых уравнение $P(x) = p$ имеет хотя бы три натуральных решения. Обозначим через s максимальное такое простое число (если таких простых не существует, положим $s = 2$), а через S — произведение всех простых чисел, не превосходящих s.

Пусть $p = P(S)$; тогда p взаимно просто с S и потому $p > s$. Пусть a — остаток от деления S на p; тогда $a^2 + 1 \,\vdots\, p$, значит, $P(a) = P(p - a) = p$. Одно из чисел a и $p - a$ чётно; обозначим его через b.

Далее, число $(b + p)^2 + 1$ делится на $2p$ (ибо b чётно, а p — нет), поэтому $P(b + p) \geqslant p$. Если $P(b + p) = p$, то уравнение $P(x) = p$ имеет три решения — b, $p - b$, $p + b$; это невозможно по предположению. Значит, $P(b + p) = q > p$, число $(b + p)^2 + 1$ делится на $2pq$ и потому не меньше, чем $2pq$. Это означает, что $q < b + p$ (в противном случае $(b + p)^2 + 1 \leqslant (2p - 1)q + 1 < 2pq$).

Наконец, обозначая через c остаток от деления числа $b + p$ на q, получаем $P(c) = P(q - c) = P(b + p) = q > p > s$, что противоречит выбору s.

Второе решение. Мы будем использовать тождество
$$(m^2 + 1)((m - 1)^2 + 1) = (m^2 - m + 1)^2 + 1, \qquad (*)$$
которое можно проверить, например, раскрытием скобок. Из него следует, что $P(m^2 - m + 1) = \max(P(m), P(m + 1))$.

Предположим противное. Пусть N — наибольшее число, встречающееся в описанных тройках; если таких троек нет, то положим $N = 3$. Последовательность натуральных чисел $P(N + 1), P(N + 2), \ldots$ не может строго убывать. Значит, найдётся число $n > N + 1$, для которого $P(n - 1) \leqslant P(n)$. Тогда $P(n^2 - n + 1) = \max(P(n), P(n - 1)) = P(n)$. Поэтому найдётся число $n \leqslant m \leqslant n^2 - n + 1$ такое, что $P(m - 1) \leqslant P(m) \geqslant P(m + 1)$; иначе $P(n - 1) \leqslant P(n) < P(n + 1) < \ldots < P(n^2 - n + 1)$, что не так.

Теперь из $(*)$ имеем $P(m^2 - m + 1) = \max(P(m), P(m - 1)) = P(m)$ и $P(m^2 + m + 1) = \max(P(m), P(m + 1)) = P(m)$. Таким образом, тройка $m, m^2 - m + 1, m^2 + m + 1$ удовлетворяет условию, и $m > N$; противоречие с выбором числа N.

Третье решение. Для любого натурального $n \geqslant 1$ рассмотрим число $(2 + \sqrt{5})^{2n+1}$; оно имеет вид $a_n + b_n\sqrt{5}$ при некоторых натуральных a_n, b_n (ясно, что $a_n < a_{n+1}$). Заметим, что

тогда $(2-\sqrt{5})^{2n+1} = a_n - b_n\sqrt{5}$, откуда
$a_n^2 - 5b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{5})(a_n - b_n\sqrt{5}) = ((2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}))^{2n+1} = -1$. Тогда $a_n^2 + 1 = 5b_n^2$; ясно, что $b_n < a_n$ и $a_n \geqslant 2^{2n+1} \geqslant 8$, поэтому все простые делители числа a_n^2+1 не превосходят $\max(5, b_n) < a_n$.

Итак, $p_n = P(a_n) < a_n$. С другой стороны, $a_n^2 + 1 \,\vdots\, 5$, значит, $p_n \geqslant 5$. Обозначим теперь через c_n остаток от деления a_n на p_n. Тогда числа $c_n, p_n - c_n, a_n$ различны и $P(c_n) = P(p_n - c_n) = P(a_n)$. Мы предъявили бесконечно много различных троек требуемого вида.

Замечание. Уравнение вида $x^2 - Dy^2 = a$ называется *уравнением Пелля.* Известно, что, если D не является квадратом, и это уравнение имеет хотя бы одно решение в натуральных числах, то оно имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

11.8. **Первое решение.** Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а J_1 и J_2 — центры его вневписанных окружностей ω_1 и ω_2, касающихся сторон AB и AC, соответственно. Прямая AN является внешней биссектрисой угла BAC, поэтому точки J_1 и J_2 лежат на ней. Пусть K_1 и K_2 — точки касания ω_1 и ω_2 соответственно с прямой BC; тогда прямые NM, J_1K_1 и J_2K_2 перпендикулярны BC. Кроме того, $BK_1 = \dfrac{AB+AC-BC}{2} = CK_2$, поэтому $MK_1 = MK_2$. По теореме Фалеса получаем $NJ_1 = NJ_2$.

Далее, $\angle J_1BJ_2 = \angle J_1CJ_2 = 90^\circ$ как углы между внутренней и внешней биссектрисами. Значит, точки B и C лежат на окружности с диаметром J_1J_2, поэтому $\angle BCJ_1 = \angle BJ_2J_1$. Тогда треугольники IBC и IJ_1J_2 подобны по двум углам, а точки M и N соответственны в этих треугольниках как середины сторон.

Пусть описанная окружность γ треугольника AI_1I_2 пересекает вторично прямые CI и BI в точках P_1 и P_2 соответственно (см. рис. 6). Заметим, что $\angle I_1P_1I_2 = \angle I_1P_2I_2 = \angle I_1AI_2 = \frac{1}{2}\angle BAC$. С другой стороны, $\angle BIP_1 = \angle IBC + \angle ICB =$

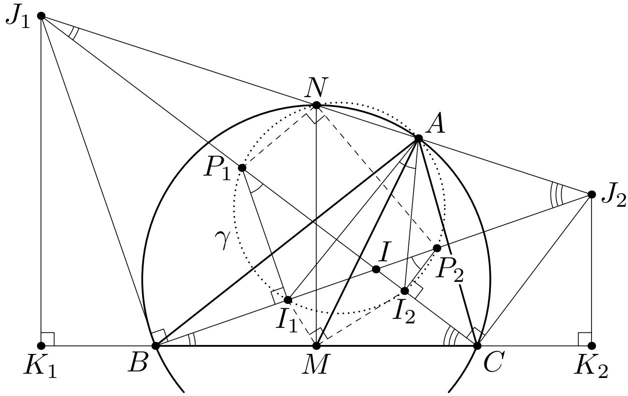

Рис. 6

$= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ - \angle I_1P_1I$; значит, $\angle P_1I_1P_2 = \angle P_1I_2P_2 = 90^\circ$, и точки P_1 и P_2 диаметрально противоположны на γ. Кроме того, прямые P_1I_1 и BJ_1 перпендикулярны BJ_2, поэтому $\frac{II_1}{IP_1} = \frac{IB}{IJ_1}$, и точки I_1 и P_1 соответственны в треугольниках IBC и IJ_1J_2. Аналогично, точки I_2 и P_2 также соответственны, откуда $\angle P_1NP_2 = \angle I_1MI_2 = 90^\circ$. Это значит, что точка N лежит на окружности с диаметром P_1P_2, то есть на γ. Это и требовалось доказать.

Второе решение. Заметим, что прямоугольные треугольники BMN и CMN симметричны относительно MN. Пусть точка I_2' симметрична I_2 относительно MN. Имеем $\angle BMI_1 + \angle BMI_2' = \angle BMI_1 + \angle CMI_2 = \frac{1}{2}(\angle BMA + \angle CMA) = 90^\circ = \angle BMN$, поэтому лучи MI_1 и MI_2' симметричны относительно биссектрисы угла BMN. Далее, $\angle MBI_1 + \angle MBI_2' = \angle MBI_1 + \angle MCI_2 = \frac{1}{2}(\angle MBA + \angle MCA) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BNC = 90^\circ - \angle BNM = \angle MBN$, поэтому лучи BI_1 и BI_2' симметричны относительно биссектрисы угла MBN.

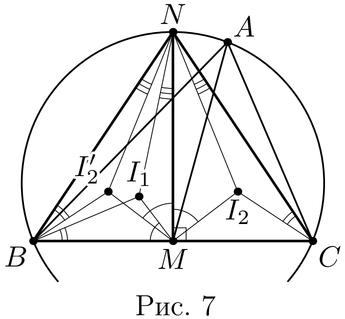

Рис. 7

Отсюда следует, что точки I_1 и I_2' — *изогонально сопряжённые точки* в треугольнике BMN, а следовательно, и лучи NI_1 и NI_2' симметричны относительно биссектрисы угла MNB. Значит, $\angle BNM = \angle MNI_1 + \angle MNI_2'$. Получаем: $\angle I_1AI_2 = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BNM = \angle MNI_1 + \angle MNI_2' = \angle MNI_1 + \angle MNI_2 = I_1NI_2$. Это и означает, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.