9 класс

Второй день

9.5. Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $2011 \cdot 2010/2$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и ещё ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3?

9.6. У Пети и Коли в тетрадях записаны по два числа; изначально — это числа 1 и 2 у Пети, 3 и 4 — у Коли. Раз в минуту Петя составляет квадратный трёхчлен $f(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа, а Коля — квадратный трёхчлен $g(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа. Если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет два различных корня, то один из мальчиков заменяет свою пару чисел на эти корни, иначе ничего не происходит. Какое второе число могло оказаться у Пети в тетради в тот момент, когда первое стало равным 5?

9.7. Пусть ABC — правильный треугольник. На его стороне AC выбрана точка T, а на дугах AB и BC его описанной окружности выбраны точки M и N соответственно так, что $MT \parallel BC$ и $NT \parallel AB$. Отрезки AN и MT пересекаются в точке X, а отрезки CM и NT — в точке Y. Докажите, что периметры многоугольников $AXYC$ и $XMBNY$ равны.

9.8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовём клетку *красивой*, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?

XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $2011 \cdot 2010/2$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и ещё ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3?

9.6. У Пети и Коли в тетрадях записаны по два числа; изначально — это числа 1 и 2 у Пети, 3 и 4 — у Коли. Раз в минуту Петя составляет квадратный трёхчлен $f(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа, а Коля — квадратный трёхчлен $g(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа. Если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет два различных корня, то один из мальчиков заменяет свою пару чисел на эти корни, иначе ничего не происходит. Какое второе число могло оказаться у Пети в тетради в тот момент, когда первое стало равным 5?

9.7. Пусть ABC — правильный треугольник. На его стороне AC выбрана точка T, а на дугах AB и BC его описанной окружности выбраны точки M и N соответственно так, что $MT \parallel BC$ и $NT \parallel AB$. Отрезки AN и MT пересекаются в точке X, а отрезки CM и NT — в точке Y. Докажите, что периметры многоугольников $AXYC$ и $XMBNY$ равны.

9.8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовём клетку *красивой*, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?

10 класс

Второй день

10.5. Даны 10 попарно различных чисел. Для каждой пары данных чисел Вася записал у себя в тетради квадрат их разности, а Петя записал у себя в тетради модуль разности их квадратов. Могли ли в тетрадях у мальчиков получиться одинаковые наборы из 45 чисел?

10.6. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой.

10.7. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ формулой $x_n = \dfrac{a^n - 1}{b^n - 1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b.

10.8. Клетчатый квадрат 2010×2010 разрезан на трёхклеточные уголки. Докажите, что можно в каждом уголке отметить по клетке так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали было поровну отмеченных клеток.

XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. Даны 10 попарно различных чисел. Для каждой пары данных чисел Вася записал у себя в тетради квадрат их разности, а Петя записал у себя в тетради модуль разности их квадратов. Могли ли в тетрадях у мальчиков получиться одинаковые наборы из 45 чисел?

10.6. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой.

10.7. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ формулой $x_n = \dfrac{a^n - 1}{b^n - 1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b.

10.8. Клетчатый квадрат 2010×2010 разрезан на трёхклеточные уголки. Докажите, что можно в каждом уголке отметить по клетке так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали было поровну отмеченных клеток.

11 класс

Второй день

11.5. Даны два различных кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с единичными старшими коэффициентами. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

11.6. На столе лежит куча из более, чем n^2 камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берёт Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее n, либо любое кратное n число камней, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи.

11.7. Для натурального a обозначим через $P(a)$ наибольший простой делитель числа a^2+1. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a, b, c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$.

11.8. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Даны два различных кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с единичными старшими коэффициентами. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

11.6. На столе лежит куча из более, чем n^2 камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берёт Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее n, либо любое кратное n число камней, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи.

11.7. Для натурального a обозначим через $P(a)$ наибольший простой делитель числа a^2+1. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a, b, c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$.

11.8. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.