Материалы для проведения заключительного этапа

XXXVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2011–2012 учебный год

Второй день

Смоленск,
23–28 апреля 2012 г.

Москва, 2012

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, А.В. Антропов, В.В. Астахов, С.Л. Берлов, Н.В. Богачёв, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.А. Гаврилюк, А.И. Гарбер, А.С. Голованов, А.Ю. Головко, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, Ф.А. Ивлев, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, Е.Г. Молчанов, В.А. Омельяненко, А.В. Пастор, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, И.А. Решетников, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, А.Б. Скопенков, М.Б. Скопенков, К.А. Сухов, Д.А. Терёшин, Б.В. Трушин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться. (*И. Богданов*)

Решение. Сопоставим каждому мудрецу с некоторым мнением знак «$+$», а с противоположным — знак «$-$». Тогда расстановке мудрецов соответствует расстановка 101 знака по кругу.

Пусть в некоторый момент два одинаковых знака стоят подряд. Тогда в следующую минуту они не изменятся, и поэтому останутся одинаковыми. Значит, ни в один из последующих моментов они также не изменятся.

Назовём теперь знак *стабильным*, если рядом с ним стоит хотя бы один такой же. Поскольку количество знаков нечётно, стабильный знак найдётся. Кроме того, любой стабильный знак уже не изменяется и остаётся стабильным, а любой нестабильный знак в очередную минуту меняется на противоположный. Предположим, что в некоторый момент какой-то знак изменился. Тогда не все знаки были стабильными, и найдётся стабильный знак a, соседний с нестабильным знаком b. Это значит, что в следующую минуту a не изменится, а b изменится, то есть станет таким же, как a и, следовательно, стабильным.

Итак, пока знаки меняются, количество стабильных знаков строго увеличивается. Значит, рано или поздно оно станет равным 101, и перемены знака закончатся.

Замечание. Можно показать, что знаки могут изменяться в течение лишь первых 50 минут.

9.6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 =$

$= CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC. (*А. Полянский*)

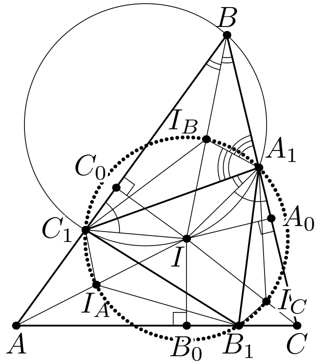

Рис. 1

Решение. Обозначим через I центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а через A_0, B_0, C_0 — точки её касания со сторонами BC, CA, AB, соответственно. Будем считать, что точка A_1 лежит на отрезке A_0B (см. рис. 1). Заметим, что $CA_0 + AC_0 = CB_0 + AB_0 = CA$. Из условия следует, что $CA_1 + AC_1 = CB_1 + AB_1 = CA$. Отсюда $CA_0 - CA_1 = AC_1 - AC_0$; это значит, что $A_1A_0 = C_1C_0$, и точка C_1 лежит на отрезке C_0A. Тогда прямоугольные треугольники IA_0A_1 и IC_0C_1 равны по двум катетам, поэтому $\angle IA_1C = \angle IC_1B$. Это значит, что четырёхугольник BC_1IA_1 вписан. Аналогично, четырёхугольники AB_1IC_1 и CA_1IB_1 также вписаны.

Точки B, I_B и I лежат на одной прямой (биссектрисе угла A_1BC_1), поэтому $\angle A_1I_BI = \angle BA_1I_B + \angle A_1BI_B = \angle I_BA_1C_1 + \angle C_1BI = \angle I_BA_1C_1 + \angle C_1A_1I = \angle I_BA_1I$. Значит, треугольник II_BA_1 равнобедренный, то есть $II_B = IA_1$. Аналогичным образом получаем, что $II_B = IC_1 = II_A = IB_1 = II_C = IA_1$. Следовательно, I — центр окружности, описанной около $I_AI_BI_C$.

9.7. Изначально на доске записаны 10 последовательных натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа на доске (обозначим их a и b) и заменить их на числа $a^2 - 2011b^2$ и ab. После нескольких таких операций на доске не осталось ни одного из исходных чисел. Могли ли там опять оказаться 10 последовательных натуральных чисел? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не могли.

Решение. Предположим, что после нескольких операций снова получились десять последовательных натуральных чисел, причём каждое из исходных чисел участвовало хотя бы в одной операции.

Лемма. *Для любого натурального k, при проведении операции количество чисел на доске, делящихся на k, не уменьшается.*

Доказательство. Если в операции участвовали числа a и b, одно из которых делится на k, то и их произведение также делится на k. Более того, если оба исходных числа делятся на k, то и число $a^2 - 2011b^2$ делится на k. Отсюда и следует утверждение леммы. □

Заметим, что в начальной и конечной ситуациях есть по пять чисел, делящихся на 2, и по одному числу, делящемуся на 10. Значит, ввиду леммы, количество чисел, делящихся на 2, в процессе должно не изменяться, и то же верно для чисел, делящихся на 10.

Среди исходных 10 чисел было число a, оканчивающееся на 5. Рассмотрим теперь первую операцию, в которой оно участвовало; пусть b — второе число, участвовавшее в этой операции. Если b нечётно, то одно из полученных чисел будет чётным, и количество чётных чисел увеличится, что невозможно. Значит, b чётно, и на доске появится число ab, делящееся на 10. Если при этом b не делится на 10, то количество чисел, кратных 10, увеличилось, что невозможно.

Итак, b делится на 10, и в нашей операции участвовали два числа, делящихся на 5. Тогда в её результате на доске получились два числа, кратных 25. По лемме, и в конечной ситуации найдутся два таких числа; но это невозможно для 10 последовательных натуральных чисел. Противоречие.

9.8. В некотором городе сеть автобусных маршрутов устроена так, что любые два маршрута имеют ровно одну общую остановку, и на каждом маршруте есть хотя бы 4 остановки. Докажите, что все остановки можно распределить между двумя компаниями так, что на каждом маршруте найдутся остановки обеих компаний. (*В. Дольников*)

Решение. Рассмотрим произвольные два маршрута ℓ_1 и ℓ_2; пусть A — их общая остановка. Если остановка A находится на всех маршрутах, то можно отдать её одной компании, а все остальные остановки — другой; ясно, что при этом на каждом маршруте будут остановки обеих компаний.

Пусть теперь найдётся маршрут ℓ_3, не проходящий через остановку A. Пусть B и C — его общие остановки с ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Ясно, что B и C отличны от A; заметим, что $B \neq C$, поскольку иначе у ℓ_1 и ℓ_2 найдутся две общих остановки.

Распределим теперь остановки по компаниям так: остановки A, B и C отдадим первой компании, все остальные остановки маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — второй компании, а все остановки, не лежащие ни на одном из маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — снова первой (см. рис. 2). Покажем, что это распределение — требуемое. Ясно, что каждый из маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 проходит через остановки обеих компаний.

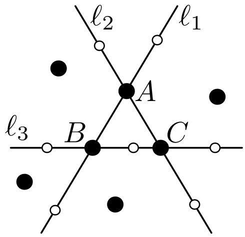

Рис. 2

Рассмотрим любой из оставшихся маршрутов ℓ. С каждым из маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 у него лишь одна общая остановка. Значит, на ℓ есть не более трёх остановок второй компании; поэтому там есть остановка первой. Далее, ℓ не может проходить через две из остановок A, B, C, иначе он будет иметь две общих остановки с одним из маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Пусть для определённости ℓ не проходит через B и C. Тогда ℓ пересекается с ℓ_3 по некоторой остановке X, отличной от B и C, то есть принадлежащей второй компании. Утверждение доказано.

10 класс

10.5. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться. (*И. Богданов*)

Решение. Сопоставим каждому мудрецу с некоторым мнением знак «+», а с противоположным — знак «−». Тогда расстановке мудрецов соответствует расстановка 101 знака по кругу.

Пусть в некоторый момент два одинаковых знака стоят подряд. Тогда в следующую минуту они не изменятся, и поэтому останутся одинаковыми. Значит, ни в один из последующих моментов они также не изменятся.

Назовём теперь знак *стабильным*, если рядом с ним стоит хотя бы один такой же. Поскольку количество знаков нечётно, стабильный знак найдётся. Кроме того, любой стабильный знак уже не изменяется и остаётся стабильным, а любой нестабильный знак в очередную минуту меняется на противоположный. Предположим, что в некоторый момент какой-то знак изменился. Тогда не все знаки были стабильными, и найдётся стабильный знак a, соседний с нестабильным знаком b. Это значит, что в следующую минуту a не изменится, а b изменится, то есть станет таким же, как a и, следовательно, стабильным.

Итак, пока знаки меняются, количество стабильных знаков строго увеличивается. Значит, рано или поздно оно станет равным 101, и перемены знака закончатся.

Замечание. Можно показать, что знаки могут изменяться в течение лишь первых 50 минут.

10.6. Существуют ли натуральные числа a, b, c, большие 10^{10} и такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2012? (*В. Сендеров*)

Ответ. Существуют.

Первое решение. Выберем некоторое $t > 10^{10}$ и положим $a = b = 2012t$, $c = 2012(t^2 - 1)$. Тогда $c \,\vdots\, 2012(t+1) = a + 2012 = b + 2012$, и $ab = 2012^2 t^2 \,\vdots\, 2012t^2 = c + 2012$. Отсюда следует, что a, b, c образуют искомую тройку.

Второе решение. Достаточно подобрать числа a', b', c' такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 1. Умножив каждое из них на 2012, мы получим требуемый пример.

Рассмотрим произвольное $t > 10^{10}$. Пусть $c' = 2t$, $b' = 2c' + 1 = 4t + 1$, $a' = b'c' - 1 = 8t^2 + 2t - 1 = (4t-1)(2t+1)$. Тогда $a'b'c' \vdots b'c' = a' + 1$, $a'b'c' \vdots a'c' \vdots (2t+1) \cdot 2 = b' + 1 = 2(c'+1)$, что и требовалось.

Замечание. В этом примере все числа различны. Существуют и другие примеры.

10.7. На координатной плоскости нарисовано n парабол, являющихся графиками квадратных трёхчленов; никакие две из них не касаются. Они делят плоскость на несколько областей, одна из которых расположена над всеми параболами. Докажите, что у границы этой области не более $2(n-1)$ углов (то есть точек пересечения пары парабол). (*Р. Карасёв*)

Решение. Докажем утверждение задачи индукцией по n. При $n = 1$ оно очевидно. Пусть теперь $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ — данные квадратные трёхчлены ($n \geqslant 2$), причём $f_n(x)$ — трёхчлен с минимальным старшим членом (если таких несколько, то любой из них). Обозначим границу нашей области через T. Можно считать, что T содержит участки всех графиков.

Пусть S — множество всех таких чисел a, что точка множества T с абсциссой a лежит на графике трёхчлена $f_n(x)$. Иначе говоря, число a принадлежит S тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $f_n(a) \geqslant f_i(a)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим через S_i множество всех решений i-го неравенства; тогда $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{n-1}$. Поскольку трёхчлен $f_n(x) - f_i(x)$ либо обладает отрицательным старшим коэффициентом, либо является на самом деле линейным, S_i — это либо отрезок (возможно, вырожденный), либо луч, либо вся прямая. Значит, и S является множеством такого же вида.

Итак, у T не более двух углов, принадлежащих графику $f_n(x)$. Если мы удалим этот график, исчезнут эти углы (и, возможно, появятся новые). При этом по предположению индукции новая область будет иметь не более $2(n-2)$ углов; значит, исходная имела не более $2(n-2) + 2 = 2(n-1)$ углов, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Оценка, указанная в условии задачи, достигается. В качестве примера можно взять квадратные трёхчлены $2x^2, 2x^2-(x-1)(x-2), 2x^2-(x-3)(x-4), 2x^2-(x-5)(x-6), \ldots$.

Замечание 2. Приведем схему другого подхода к задаче, который годится не только для квадратных трёхчленов, но и для любых непрерывных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, графики любых двух из которых пересекаются не более, чем в двух точках.

Пусть T разбивается точками пересечения функций на участки $I_0, I_1, \ldots, I_k$ графиков функций $f_{m_0}, f_{m_1}, \ldots, f_{m_k}$ (считаем, что участки занумерованы слева направо). Выписав подряд индексы, мы получим *слово* $M = (m_0, m_1, m_2, \ldots, m_k)$ в *алфавите* из n *букв* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ясно, что в слове M нет двух подряд идущих одинаковых букв (условие 1). Также нетрудно показать, что из слова M нельзя, вычеркнув несколько букв, получить слово вида (a, b, a, b), где $a \neq b$ (условие 2)*. Утверждение задачи теперь можно получить, доказав, что длина слова, удовлетворяющего условиям 1 и 2, не превосходит $2n-1$. Это можно сделать различными методами.

10.8. Точка E — середина отрезка, соединяющего точку пересечения высот неравнобедренного остроугольного треугольника ABC с его вершиной A. Окружность, вписанная в этот треугольник, касается сторон AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что точка F, симметричная точке E относительно прямой $B'C'$, лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. (*Л. Емельянов*)

Первое решение. Будем считать, что $AB > AC$ (см. рис. 3). Пусть BB_1 и CC_1 — высоты треугольника $\triangle ABC$, H — точка их пересечения, O и I — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, а r — радиус его вписанной окружности; положим $\angle BAC = \alpha$. Заметим, что $AB_1 = AB\cos\alpha$, $AC_1 = AC\cos\alpha$. Значит, треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом $k = \cos\alpha$.

Пусть точка L симметрична точке I относительно $B'C'$.

*Слова, удовлетворяющие таким условиям, называются последовательностями Дэвенпорта–Шинцеля.

Лемма. *Точки* L *и* I *— соответственные точки в треугольниках* AB_1C_1 *и* ABC.

Доказательство. Поскольку $AI \perp B'C'$, точка L лежит на биссектрисе AI. Значит, достаточно доказать, что $\frac{AL}{AI} = k$. Обозначим через M середину отрезка $B'C'$. Заметим, что прямоугольные треугольники $AC'I$ и $C'MI$ подобны, поэтому $\angle MC'I = \angle C'AI = \alpha/2$.

Имеем $AI = \frac{r}{\sin(\alpha/2)}$, $AL = AI - LI = AI - 2MI = \frac{r}{\sin(\alpha/2)} - 2r\sin(\alpha/2)$, значит, $\frac{AL}{AI} = 1 - 2\sin^2(\alpha/2) = \cos\alpha = k$, что и требовалось доказать. □

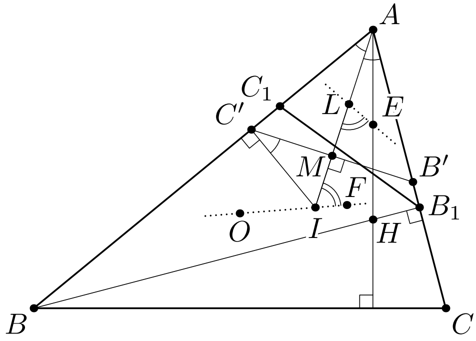

Рис. 3

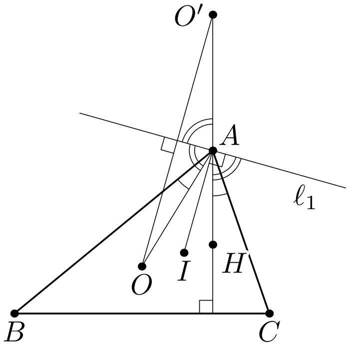

Рис. 4

Точки A, B_1, C_1 и H лежат на окружности с диаметром AH, поэтому E — центр этой окружности. Значит, точки E и O в треугольниках AB_1C_1 и ABC также соответственны; поэтому $\angle OIA = \angle ELA$. Так как точка F симметрична E относительно $B'C'$, отрезки FI и EL также симметричны, и $\angle FIA = \angle ELI$. Итак, $\angle OIA + \angle FIA = \angle ELA + \angle ELI = 180^\circ$, что и означает, что точки O, I, F лежат на одной прямой.

Второе решение. Мы используем те же обозначения, что и в первом решении. Обозначим через ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 внешнюю биссектрису угла BAC, серединный перпендикуляр к отрезку AI и прямую $B'C'$ соответственно. Очевидно, прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 параллельны. Пусть O' — точка, симметричная точке O относительно ℓ_1. Докажем следующие два утверждения: (1) точки O', A, E лежат на одной прямой; (2) отношение расстояний между точками O', A, E равно отношению расстояний между прямыми ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3.

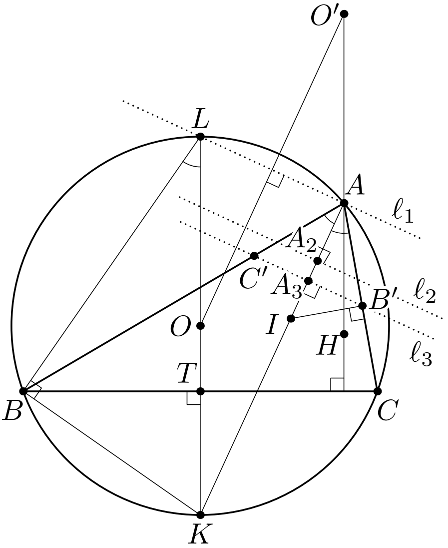

Рис. 5

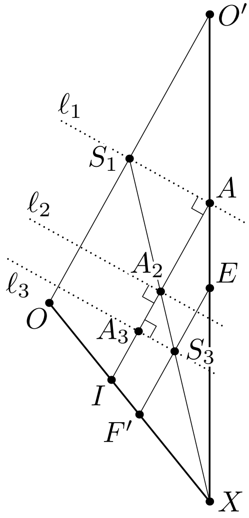

Рис. 6

(1). Заметим, что $\angle OAB = (180^\circ - \angle AOB)/2 = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAH$. Значит, лучи AO и AH образуют с прямой ℓ_1 углы, равные $\angle OAB + (180^\circ - \angle BAC)/2$; поэтому лучи AO' и AH противоположно направлены (см. рис. 4).

(2). Обозначим через A_2 и A_3 точки пересечения прямой AI с ℓ_2 и ℓ_3 соответственно, а через T, K, L середины стороны BC и дуг BC, BAC описанной окружности соответственно (см. рис. 5). Имеем $\angle LBK = \angle AB'I = 90^\circ$, $\angle BLK = \angle BAK = \angle B'AI$, поэтому прямоугольные треугольники LBK и $AB'I$ подобны. В этих треугольниках точки T и A_3 — основания соответствующих высот, а точки O, A_2 — середины гипотенуз, поэтому $\dfrac{OL}{OT} = \dfrac{A_2A}{A_2A_3}$. С другой стороны, точки T и O переходят соответственно в A и H при гомотетии с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом -2; поэтому $OT = \dfrac{AH}{2} = AE$, и из симметрии $AO' = AO = OL$. Таким образом, $\dfrac{AO'}{AE} = \dfrac{OL}{OT} = \dfrac{A_2A}{A_2A_3}$.

Теперь нетрудно завершить утверждение задачи. Покажем, что точки, симметричные точкам O', A и E относительно прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 соответственно (а это и есть точки O, I, F) лежат на одной прямой. Пусть прямые OI и AO' пересекаются в точке X. Пусть F' — точка пересечения прямых EF и OI. Наконец, пусть S_1 и S_3 — середины отрезков OO' и $F'E$ соответственно (см. рис. 6). Треугольники XOO', XIA и $XF'E$ гомотетичны, поэтому их медианы XS_1, XA_2, XS_3 лежат на одной прямой, и из подобия получаем $\frac{S_1A_2}{A_2S_3} = \frac{O'A}{AE} = \frac{A_2A}{A_2A_3}$. Это означает, что $A_3S_3 \parallel AS_1$. Значит, S_3 лежит на прямой ℓ_3, откуда $F' = F$, что и требовалось доказать.

Замечание. В последней части решения, по сути, доказан следующий факт. Пусть точка X движется по некоторой прямой m с постоянной скоростью, а прямая ℓ движется по плоскости, оставаясь параллельной самой себе. Тогда точка, симметричная X относительно ℓ, также движется по некоторой прямой.

11 класс

11.5. Даны многочлен $P(x)$ и числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ такие, что $a_1a_2a_3 \neq 0$. Оказалось, что для любого действительного x выполняется равенство
$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3).$$
Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

(*А. Голованов, О. Дмитриев, К. Сухов*)

Первое решение. Предположим, что $P(x)$ не имеет действительных корней. Тогда $P(x)$ имеет четную степень, не меньшую 2. Действительно, любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень, а если $P(x) = \mathrm{const}$, то из условия получаем, что $P(x) \equiv 0$.

Так как $P(x)$ не имеет действительных корней, то он принимает значения одного знака. Будем считать, что $P(x)$ принимает только положительные значения (иначе умножим $P(x)$ на -1), то есть для любого x выполняется $P(x) > 0$. Так как $P(x)$ имеет четную степень, найдется точка t_0, в которой достигается (глобальный нестрогий) минимум $P(x)$, то есть для любого x выполняется неравенство $P(x) \geqslant P(t_0) = A > 0$. Рассмотрим x_0 такое, что $t_0 = a_3x_0 + b_3$. Но тогда $P(a_1x_0 + b_1) + P(a_2x_0 + b_2) \geqslant 2A > > A = P(t_0) = P(a_3x_0 + b_3)$. Получили противоречие. Значит, $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

Второе решение. Пусть $a_1 \neq a_3$; тогда существует такое x_0, что $a_1x_0 + b_1 = a_3x_0 + b_3$. Подставляя $x = x_0$ в данное равенство, получаем после сокращения $P(a_2x_0 + b_2) = 0$, то есть у $P(x)$ есть корень. Аналогично рассматривается случай $a_2 \neq a_3$.

Остался лишь случай $a_1 = a_2 = a_3 = a \neq 0$. Если $P(x) \equiv 0$, утверждение задачи очевидно. Иначе пусть $p_0 \neq 0$ — старший коэффициент многочлена $P(x)$, а n — его степень. Тогда старшие коэффициенты многочленов в левой и правой частях данного равенства есть $p_0(a^n + a^n)$ и p_0a^n, т.е. они различны. Это невозможно.

11.6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC. (*А. Полянский*)

Решение. Обозначим через I центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а через A_0, B_0, C_0 — точки её касания со сторонами BC, CA, AB, соответственно. Будем считать, что точка A_1 лежит на отрезке A_0B. Заметим, что $CA_0 + AC_0 = = CB_0 + AB_0 = CA$. Из условия следует, что $CA_1 + AC_1 = CB_1 + AB_1 = = CA$. Значит, $CA_0 - CA_1 = AC_1 - - AC_0$; это значит, что $A_1A_0 = C_1C_0$, и точка C_1 лежит на отрезке C_0A. Значит, прямоугольные тре-

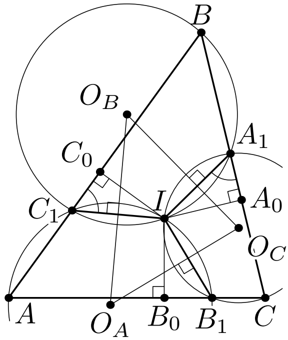

Рис. 7

угольники IA_0A_1 и IC_0C_1 равны по двум катетам, поэтому $\angle IA_1C = \angle IC_1B$ и $IA_1 = IC_1$. Это значит, что четырёхугольник BC_1IA_1 вписан. Аналогично, четырёхугольники AB_1IC_1 и CA_1IB_1 также вписаны, и $IA_1 = IB_1 = IC_1$.

Линии центров O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B являются серединными перпендикулярами к общим хордам IA_1, IB_1, IC_1 соответственно; длины этих хорд равны. Значит, расстояния от I до сторон треугольника $O_AO_BO_C$ равны $\frac{IA_1}{2} = \frac{IB_1}{2} = \frac{IC_1}{2}$. Наконец, поскольку углы $\angle IBA_1$, $\angle IAC_1$, $\angle ICB_1$ острые, то отрезки O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B пересекают лучи IA_1, IB_1, IC_1, соответственно. Значит, I лежит внутри треугольника $O_AO_BO_C$; значит, это и есть центр вписанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$.

11.7. На окружности отмечено $2n+1$ точек, делящих её на равные дуги ($n \geqslant 2$). Двое по очереди стирают по одной точке. Если после хода игрока оказалось, что все треугольники с вершинами в ещё отмеченных точках — тупоугольные, он немедленно выигрывает, и игра заканчивается. Кто выиграет при правильной игре: начинающий игру или его противник? (*Ф. Ивлев*)

Ответ. Противник.

Решение. Приведём стратегию для второго игрока, позволяющую ему выиграть. Для этого он будет добиваться выполнения следующего условия: перед каждым ходом первого, если осталось $2k+1 \geqslant 5$ точек, то на любой полуокружности осталось не менее k отмеченных точек.

Покажем индукцией по числу ходов, что это возможно. В начале игры это условие выполнено. Пусть перед ходом первого оно выполнено; пронумеруем оставшиеся точки по порядку $A_0, \ldots, A_{2k}$. Пусть для определённости первый своим ходом удаляет точку A_0; заметим, что треугольник $A_{k+1}A_1A_{k+2}$ остроугольный, так что игра ещё не закончилась. Второму достаточно удалить точку A_k. Теперь, если с некоторой полуокружности удалено не более одной точки, то на ней осталось не менее $k-1$ точки; иначе с неё стёрты обе точки A_0 и A_k, поэтому на ней остались либо точки $A_1, \ldots, A_{k-1}$, либо точки $A_{k+1}, \ldots, A_{2k}$; в любом случае для неё требуемое условие выполнено.

Итак, если первый не проиграет раньше, то после $2n-4$ ходов на доске останется пять точек A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Пусть для определённости первый удалит точку A_0; тогда ещё останется остроугольный треугольник $A_1A_2A_4$. Второй же последним ходом удалит A_4, и оставшийся треугольник $A_1A_2A_3$ будет тупоугольным (иначе нашлась бы полуокружность, содержащая лишь A_2). Значит, второй выиграет.

Замечание 1. Естественно, вместо точки A_k второй может выбирать также точку A_{k+1}. Нетрудно видеть, что при описанной стратегии в конце игры останутся именно три отмеченных точки.

Замечание 2. По сути ту же стратегию можно оформить по-другому. Соединим каждую из исходных точек с двумя наиболее удалёнными от неё. Все проведённые отрезки образуют одну $(2n+1)$-звенную ломаную. Тогда второй может ходить так, чтобы после каждого его хода (кроме последнего) все **стёртые** точки разбивались на пары точек, соединённых отрезком. Можно показать, что соблюдения этого условия также достаточно для выигрыша.

11.8. Для натурального n обозначим $S_n = 1!+2!+\ldots+n!$. Докажите, что при некотором n у числа S_n есть простой делитель, больший 10^{2012}. (*Ф. Петров*)

Решение. Для простого p и натурального n обозначим через $\nu_p(n)$ степень, в которой p входит в разложение n на простые множители. Заметим, что если $\nu_p(n) \neq \nu_p(k)$, то $\nu_p(n\pm k) = \min(\nu_p(n), \nu_p(k))$.

Предположим противное; обозначим $P = 10^{2012}$. Тогда все простые делители чисел вида S_n не превосходят P.

Лемма. *Пусть $\nu_p(S_n) < \nu_p((n+1)!)$ при некотором n. Тогда $\nu_p(S_k) = \nu_p(S_n)$ при всех $k \geqslant n$.*

Доказательство. Обозначим $a = \nu_p(S_n)$, $b = \nu_p((n+1)!)$; тогда $b \geqslant a+1$. Заметим, что $S_k = S_n + (n+1)! + \ldots + k!$; в этой сумме все слагаемые, кроме первого, делятся на p^{a+1}, а первое делится лишь на p^a, но не на p^{a+1}. Значит, и S_k делится на p^a, но не на p^{a+1}. □

Рассмотрим некоторое простое $p \leqslant P$. Ввиду леммы, если

$\nu_p(S_n) < \nu_p((n+1)!)$ при некотором n, то существует число a_p такое, что $\nu_p(S_n) \leqslant a_p$ при всех натуральных n. Назовём такое простое число p *маленьким*; все остальные простые числа, меньшие P, назовём *большими*. Так как маленьких простых конечное количество, существует натуральное M, большее любого числа вида p^{a_p}, где p — маленькое.

Пусть теперь p — большое простое число, а n — такое число, что $n+2 \,\vdots\, p$. Тогда из леммы имеем $\nu_p(S_{n+1}) \geqslant \nu_p((n+2)!) > \nu_p((n+1)!)$; значит, $\nu_p(S_n) = \nu_p(S_{n+1} - (n+1)!) = \nu_p((n+1)!) = \nu_p(n!)$ (последний переход верен, ибо $n+1$ не кратно p).

Рассмотрим теперь число $N = MP! - 2$. По доказанному, $\nu_p(S_N) = \nu_p(N!)$ для любого большого простого p. Кроме того, поскольку $N \geqslant M$, то $\nu_p(S_N) \leqslant \nu_p(p^{a_p}) \leqslant \nu_p(N!)$ для любого маленького простого p. Поскольку все простые делители числа S_N — либо большие, либо маленькие, отсюда следует, что $S_N \leqslant N!$, что, очевидно, неверно. Противоречие.

Замечание. После доказательства леммы можно завершить решение и по-другому. Например, можно показать, что $\nu_p(S_{n-1}) = \nu_p(n!)$ для любого n, кратного большому простому p. Предположим противное, тогда $\nu_p(S_{n-1}) > \nu_p(n!)$. Рассмотрим число

$$S_{n+p-1} = S_{n-1} + n! \cdot (1 + (n+1) + (n+1)(n+2) + \\ + \ldots + (n+1)\ldots(n+p-1)).$$

Обозначим через A_n выражение в скобках в правой части; тогда $A_n \equiv 1 + 1! + 2! + \ldots + (p-1)! = 1 + S_{p-1} \pmod p$. Поскольку $S_{p-1} \,\vdots\, p$ по лемме, получаем, что A_n не делится на p и потому $\nu_p(S_{n+p-1}) = \min(\nu_p(S_{n-1}), \nu_p(n!)) = \nu_p(n!) < \nu_p((n+p)!)$. Это противоречит лемме.

Отсюда, полагая $N = kP! - 1$ при некотором натуральном $k \geqslant M$, получаем $\nu_p(S_N) \leqslant \nu_p((N+1)!)$ для любого $p \leqslant P$. В то же время, у числа $(N+1)!$ есть простые делители, бóльшие P, и нетрудно показать, что при достаточно большом k их вклад больше, чем $N+1$; значит, $S_k \leqslant (N+1)!/(N+1) = N!$, что неверно.