Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

5 класс. Краткие решения.

1. В двух аквариумах вместе 100 рыбок. Когда из первого аквариума отселили 30 рыбок, а из второго 40, то в аквариумах осталось поровну рыбок. Сколько рыбок было в каждом аквариуме первоначально?

Ответ. 45 и 55 рыбок соответственно.

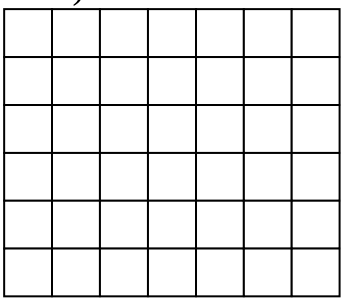
Решение. После отселения в аквариумах осталось 100-30-40=30 рыбок. Значит, в каждом по 15. Поэтому в первом вначале было 15+30=45 рыбок, а во втором 15+40=55 рыбок.

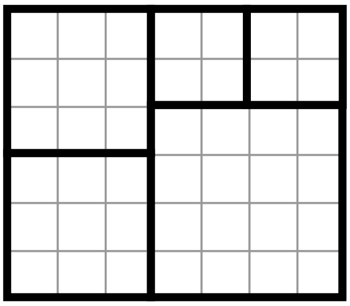
2. Вася перемножил двенадцать четверок, а Петя – двадцать пять двоек. У кого число получилось больше? Ответ обоснуйте.

Ответ. У Пети.

Решение. Так как две двойки в произведении дают 4, то произведение 12 Васиных четверок то же самое, что произведение 24 двоек. А так как Петя перемножил 25 двоек (25>24), то и результат у него получился больше (в два раза).

3. Можно ли прямоугольник, изображенный ниже, разрезать на пять квадратов? (Квадраты не обязательно одинаковые, лишних частей остаться не должно)



Ответ. Например, так: 

4. Три гнома, Пили, Ели и Спали, нашли в пещере алмаз, топаз и медный таз. У Ели капюшон красный, а борода длиннее, чем у Пили. У того, кто

нашел таз, самая длинная борода, а капюшон синий. Гном с самой короткой бородой нашел алмаз. Кто что нашел? Ответ объясните.

Ответ. Медный таз нашел Спали, алмаз – Пили, топаз – Ели.

Решение. Так как у гнома с самой длинной бородой капюшон синий, то у Ели не самая длинная борода. У Пили тоже не самая длинная (т.к. она короче, чем у Ели). Поэтому самая длинная борода у Спали, средняя –у Ели и самая короткая – у Пили. Значит, таз нашел Спали, а алмаз – Пили. И, значит, Ели нашел топаз.

5. Напишите такие 7 последовательных натуральных чисел, чтобы среди цифр в их записи было ровно 16 двоек. (Последовательные числа отличаются на 1.)

Ответ. Подойдет любая из следующих двух последовательностей:

2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235

2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221

Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

6 класс. Краткие решения.

1. Петя обменивался наклейками. Одну наклейку он меняет на 5 других. Вначале у него была 1 наклейка. Сколько наклеек у него будет после 30 обменов?

Ответ. *121*.

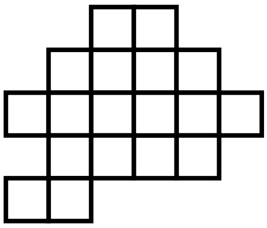
*Решение. После каждого обмена количество Петиных наклеек увеличивается на 4 (одна наклейка исчезает и появляется 5 новых). После 30 обменов количество наклеек увеличится, на 30*4=120. Вначале у Пети была одна наклейка, после 30 обменов будет 1+120=121.*

2. Вася перемножил одну четверку и 27 девяток, а Петя – 55 троек. У кого число получилось больше? Ответ обоснуйте.

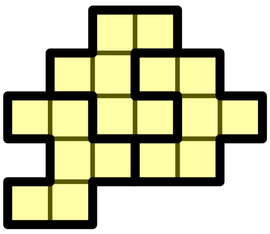
Ответ. У Васи число больше.

Решение. Так как две тройки в произведении дают 9, то произведение 55 Петиных троек то же самое, что произведение одной тройки и 27 девяток. Так как произведение тройки и 27 девяток меньше, чем произведение четверки и 27 девяток, то Петино число меньше.

3. Разрежьте фигуру (по границам клеток) на три равные (одинаковые по форме и величине) части.



Ответ.



4. Три гнома, Пили, Ели и Спали, нашли в пещере алмаз, топаз и медный таз. У Ели капюшон красный, а борода длиннее, чем у Пили. У того, кто нашел таз, самая длинная борода, а капюшон синий. Гном с самой короткой бородой нашел алмаз. Кто что нашел? Ответ объясните.

Ответ. Медный таз нашел Спали, алмаз – Пили, топаз – Ели.

Решение. Так как у гнома с самой длинной бородой капюшон синий, то у Ели не самая длинная борода. У Пили тоже не самая длинная (т.к. она короче, чем у Ели). Поэтому самая длинная борода у Спали, средняя –у Ели и самая *короткая – у Пили. Значит, таз нашел Спали, а алмаз – Пили. И, значит, Ели нашел топаз.*

5. Напишите такие 7 последовательных натуральных чисел, чтобы среди цифр в их записи было ровно 16 двоек. (Последовательные числа отличаются на 1.)

<u>Ответ.</u> Подойдет любая из следующих двух последовательностей:

2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235

2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221

6. Три прыжка двухголового дракона равны 5 прыжкам трёхголового. Но за то время, когда двухголовый дракон делает 4 прыжка, трёхголовый делает 7 прыжков. Кто из них бежит быстрее? Ответ обоснуйте.

<u>Ответ.</u> Трёхголовый.

*<u>Решение.</u> Рассмотрим время, за которое двухголовый дракон делает 3*4=12 прыжков. За это время трёхголовый делает 3*7=21 прыжок. Так как 12=4*3, то 12 прыжков двухголового дракона равны 4*5=20 прыжкам трёхголового. Итак, за одно и то же время трёхголовый дракон перемещается на 21 прыжок, а двухголовый – на 20 прыжков трёхголового. Значит, трёхголовый бежит быстрее.*

Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

7 класс. Краткие решения.

1. Петя обменивался наклейками. Одну наклейку он меняет на 5 других. Вначале у него была 1 наклейка. Сколько наклеек у него будет после 50 обменов?

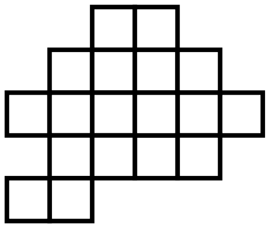
Ответ. *201.*

*Решение. После каждого обмена количество Петиных наклеек увеличивается на 4 (одна наклейка исчезает и появляется 5 новых). После 50 обменов количество наклеек увеличится на 50*4=200. Вначале у Пети была одна наклейка, после 50 обменов будет 1+200=201.*

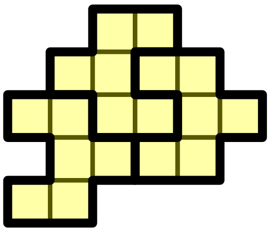
2. Однажды дядя Федор взвесил Шарика и Матроскина. Оказалось, что Шарик на 6 кг тяжелее Матроскина, а Матроскин втрое легче Шарика. Сколько весил Матроскин?

Ответ. 3 кг.

Решение. Так как Матроскин втрое легче Шарика, то Матроскин легче Шарика на два своих веса. По условию это равно 6 кг, т.е. Матроскин весит 6:2=3 кг.



3. Разрежьте фигуру (по границам клеток) на три равные (одинаковые по форме и величине) части.

Ответ. 

4. Напишите такие 7 последовательных натуральных чисел, чтобы среди цифр
в их записи было ровно 16 двоек. (Последовательные числа отличаются на 1.)

Ответ. Подойдет любая из следующих двух последовательностей:
2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221
2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235

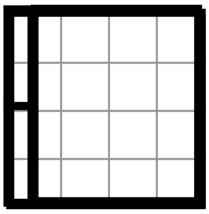
5. Мама купила коробку кускового сахара (сахар в кубиках). Дети сначала съели верхний слой – 77 кубиков, затем боковой слой – 55 кубиков, наконец, передний слой. Сколько кубиков сахара осталось в коробке?

Ответ. 300 или 0.

*Решение. У коробки есть три измерения: высота, ширина и глубина. Чтобы узнать, сколько кубиков в верхнем слое, нужно ширину умножить на глубину, в боковом – высоту на глубину. После того, как был съеден верхний слой, высота уменьшилась на 1, а глубина осталась прежней. Т.е. 77 и 55 должны делиться на глубину исходной коробки. Т.к. у 77 и 55 общие множители только 1 и 11. Если глубина равна 1, то после съедания переднего слоя ничего не осталось. Если считать, что сахар все же остался, то глубина коробки 11. Тогда ширина 77:11=7 кубиков, а высота после того, как верхний слой съеден, 55:11=5 кубиков. После того, как будет съеден боковой слой, ширина уменьшится на 1 (и станет равна 7-1=6 кубиков), а после того, как съедят передний слой, глубина уменьшится на 1 и станет равна 11-1=10. Итого высота оставшегося в коробке сахара 5, ширина – 6, глубина – 10 кубиков. Т.е. в коробке осталось 5*6*10=300 кубиков сахара.*

6. Разрежьте квадрат со стороной 4 на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25.

*Ответ: Например, два прямоугольника 2×0,5 и один прямоугольник 3,5×4 – см. рисунок. Суммарный периметр 2*2*(2+0,5)+2*(3,5+4)=25.*



Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

8 класс. Краткие решения.

1. Голова рыбы весит столько, сколько хвост и половина туловища, туловище — столько, сколько голова и хвост вместе. Хвост весит 1 кг. Сколько весит рыба?

Ответ. *8 кг.*

Решение 1. Туловище весит столько, сколько голова и хвост, т.е. два хвоста и половина туловища. Значит, половина туловища весит как два хвоста, т.е. туловище весит 4 кг. Тогда голова весит 1+2=3 кг, а вся рыба 4+3+1=8 кг.

Решение 2. Обозначим Г, Т, Х – вес головы, туловища и хвоста соответственно. Тогда по условию Г=Т/2+Х, Т=Г+Х. Откуда Г=(Г+Х)/2+Х, т.е. Г=3Х. Значит, рыба весит Г+Т+Х=3Х+(3Х+Х)+Х=8Х=8 кг.

2. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 555. Может ли уменьшаемое быть целым числом? Если да, то приведите пример, если нет, то объясните, почему.

Ответ. *Нет.*

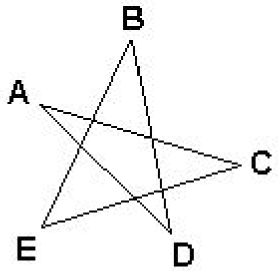
Решение. *Так как сумма вычитаемого и разности равна уменьшаемому, то сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна удвоенному уменьшаемому, т.е. уменьшаемое равно 555/2 – нецелое число.*

3. В психиатрической больнице есть главный врач и много сумасшедших. В течение недели каждый сумасшедший один раз в день кусал кого-нибудь (возможно и себя). В конце недели оказалось, что у каждого из больных по два укуса, а у главного врача – сто укусов. Сколько сумасшедших в больнице?

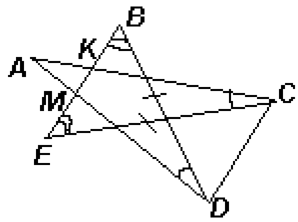
Ответ. *20 сумасшедших.*

Решение. *Пусть в больнице n сумасшедших. Тогда в конце недели, с одной стороны, было сделано 7n укусов, а с другой, 2n+100.Т.е. 7n=2n+100, откуда n=20.*

4. В пятиугольной звезде, изображенной на рисунке, $\angle ACE = \angle ADB$ и $\angle DBE = \angle BEC$. Известно также, что $BD = CE$. Докажите, что $\angle ACD = \angle ADC$.



<u>Доказательство.</u> Пусть AC и AD пересекают отрезок BE в точках K и M соответственно (см. рис.). Из условия задачи следует, что треугольники *CEK* и *DBM* равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, *CK* = *DM* и $\angle CKE = \angle DMB$. Тогда $\angle AKE = \angle AMB$ (углы, смежные с равными). Получим, что в треугольнике *AMK* равны углы, прилежащие к стороне *MK*, поэтому этот треугольник – равнобедренный (*AK* = *AM*). Следовательно, *AC* = *AK* + *CK* = *AM* + *DM* = *AD*, то есть треугольник *ACD* – также равнобедренный (с основанием *CD*). Поэтому $\angle ACD = \angle ADC$, что и требовалось доказать.

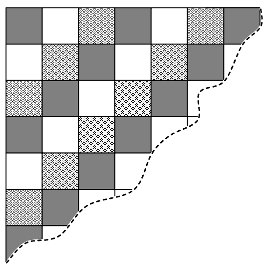


5. Дан числовой ребус: ТЭТА+БЭТА=ГАММА. (Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые.) Найдите все его решения и докажите, что других нет.

<u>Ответ.</u> 4940+5940=10880

<u>Решение.</u> Т.к. Г – результат переноса в следующий разряд, то Г =1. Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Значит, переноса в разряд десятков нет, т.е. Т+Т заканчивается на М, и значит, М четно. Переноса в разряд сотен тоже нет, т.к. иначе нечетное число Э+Э+1 заканчивалось бы на четное М. Т.к. переноса нет, то 2Т<10. Возможные варианты 2, 3, 4. Если Т=2, то Э=7, откуда Б=7 – но 7 уже занята. Если Т=3, то М=6, Э=8, откуда Б=6, но 6=М. И последний вариант Т=4. Тогда М=8, Э=9. Откуда Б=5 – противоречия нет. Таким образом, возможен только один вариант: 4940+5940=10880

6. Прямоугольную доску покрасили в три цвета, как показано на рисунке (угловую клетку покрасили в первый цвет, две соседние с ней – во второй, три соседние с только что покрашенными – в третий, следующие соседние с уже покрашенными – снова в первый и т.д.). Может ли для каких-нибудь размеров доски случиться так, что клеток одного цвета будет на две больше, чем какого-то другого?



<u>Ответ.</u> Нет.

<u>Решение.</u> Пусть размеры доски $n\times m$. Будем отрезать от прямоугольника части, в которых всех цветов поровну. При такой раскраске в любом прямоугольнике 3×1 есть клетки всех цветов, значит в любой полоске $3k\times 1$ всех цветов поровну. Пусть n при делении на 3 дает остаток r: $n=3t+r$. Отрежем от исходного прямоугольника кусок $3t\times m$ – в этом куске всех цветов поровну. Остался прямоугольник $r\times m$. Пусть n при делении на 3 дает остаток q: $m=3s+q$. Отрежем от оставшегося прямоугольника $r\times m$ кусок $r\times 3s$ – в нем

всех цветов поровну. Остался прямоугольник $r \times q$*. Т.к.* r *и* q *– остатки при делении на 3 (т.е. числа 0, 1,2), то всевозможные варианты для оставшегося прямоугольника – это*

1) ничего не осталось, т.е. в исходном прямоугольнике клеток всех цветов поровну.

2) остался прямоугольник 1×2*. Т.к. в нем присутствуют два цвета, то в исходном прямоугольнике клеток какого-то одного цвета на одну меньше, чем клеток каждого из двух других цветов.*

3) остался прямоугольник 2×2*. При нашей раскраске в нем будет одна клетка какого-то одного цвета, две – другого и одна – третьего. Т.е. в исходном прямоугольнике клеток какого-то одного цвета на одну больше, чем клеток каждого из двух других цветов.*

Итак, во всех возможных вариантах получается, что максимальный разрыв между количеством клеток разных цветов равен 1.

Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

9 класс. Краткие решения.

1. Вместо знаков многоточия вставьте такие числа, чтобы выражение $(x^2 + \ldots\times x + 2) \times(x + 3) = (x + \ldots)\times(x^2 + \ldots\times x + 6)$ стало тождеством.

Ответ. $(x^2+3x+2)(x+3)=(x+1)(x^2+5x+6)$

Решение. Обозначим неизвестные коэффициенты a, b, c соответственно:

$(x^2+ax+2)(x+3)=(x+b)(x^2+cx+6)$ *и приведем к стандартному виду многочлены в левой и правой части:*

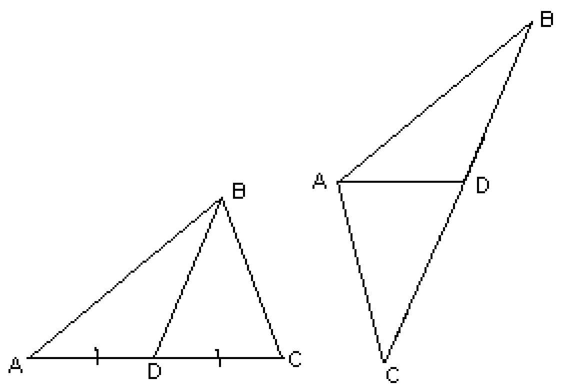
$x^3 +(a+3)x^2 + (3a+2)x+6 = x^3 +(b+c)x^2 + (bc+6)x+6b$

Данное равенство будет являться тождеством тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства $6b=6$; $bc+6=3a+2$; $b+c=a+3$. *Решая соответствующую систему уравнений, получим, что* $b=1$; $a=3$; $c=5$.

2. Вася вырезал из картона треугольник, разрезал его на два треугольника и послал обе части Пете, который опять сложил из них треугольник. Верно ли, что Петин треугольник обязательно равен вырезанному Васей? Если нет – приведите пример, если да – обоснуйте.

Ответ. Нет.

Например, если Вася разрезал остроугольный треугольник ABC по медиане BD (см. рис. слева), а Петя сложил треугольник так, как это показано на рис.



Получившийся треугольник не равен исходному, т.к. исходный – остроугольный, а получившийся – тупоугольный (∠A получившегося треугольника равен сумме ∠A и ∠C исходного).

3. Аня и Даня вместе весят 82 кг, Даня и Таня – 74 кг, Таня и Ваня – 75 кг, Ваня и Маня – 65 кг, Маня и Аня – 62 кг. Кто тяжелее всех и сколько он весит?

Ответ. Ваня, он весит 43 кг.

Решение. Сложив данные в условии веса: 82+74+75+65+62=358, получим удвоенный вес всех детей. Т.е. все дети весят 358/2=179.

Аня, Даня, Таня, Ваня в сумме весят 82+75=157, т.е. Маня весит 179-157=22.

Аналогично находим, что Аня весит 179-(74+65)=40, Даня весит 179-(75+62)=42, Таня 179-(82+65)=32, Ваня 179-(74+62)=43. Т.о. самый тяжелый Ваня и он весит 43 кг.

4. Решите числовой ребус: ТЭТА+БЭТА=ГАММА. (Разные буквы – разные цифры.)

Ответ. 4940+5940=10880

Решение. Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Т.к. Г – результат переноса в следующий разряд, то Г =1. Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Значит переноса в разряд десятков нет, т.е. Т+Т заканчивается на М, и значит М – четно. Переноса в разряд сотен тоже нет, т.к. иначе нечетное число Э+Э+1 заканчивалось бы на четное М. Т.к. переноса нет, то 2ТБ<10. Возможные варианты 2, 3, 4. Если Т=2, то Э=7, откуда Б=7 – но 7 уже занята. Если Т=3, то М=6, Э=8, откуда Б=6, но 6=М. И последний вариант Т=4. Тогда М=8, Э=9. Откуда Б=5 – противоречия нет. Таким образом, возможен только один вариант: 4940+5940=10880

5. В треугольнике ABC точка M – середина AC, MD и ME – биссектрисы треугольников ABM и CBM соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке F. Найдите MF, если DE = 7.

Ответ. 3,5

Решение. По свойству биссектрисы из треугольников AMB и CMB получим, что $\frac{AD}{BD}=\frac{AM}{BM}$ *и* $\frac{CE}{BE}=\frac{CM}{BM}$*. По условию, AM = CM, значит,* $\frac{AD}{BD}=\frac{CE}{BE}$*, следовательно, DE || AC (по теореме, обратной теореме Фалеса, для угла ABC или же из подобия треугольников DBE и ABC). Тогда F – середина отрезка DE.*

Так как MD и ME – биссектрисы смежных углов, то треугольник DME – прямоугольный. Его медиана MF, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы DE.

6. В клетчатом квадрате 6×6, вначале пустом, Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них будет равна 60.

*<u>Доказательство.</u> Выложим наш квадрат из спичек, в том числе все перегородки между клеточками (длина спички равна стороне клеточки). Вместо того, чтобы закрашивать клетку, будем закрашивать ограничивающие ее спички. Тогда число, записываемое в каждую клетку равно количеству ранее закрашенных спичек, ограничивающих эту клетку. Выкинем все спички, составляющие периметр исходного квадрата. Тогда каждая оставшаяся спичка добавляет 1 в общую сумму (учитывается 1 раз в числе той из двух клеток, разделяемых этой спичкой, которая была закрашена позднее. Таким образом, сумма всех чисел есть количество внутренних перегородок между клетками. А их будет 6*5 вертикальных и 6*5 горизонтальных, т.е. всего 60.*

Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

10 класс. Краткие решения.

1. Решите уравнение 1 – (2 – (3 – (...2010 – (2011 – (2012 – x))...))) = 1006.

Ответ. $x=2012$

Решение. Открыв скобки, получим $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2011 - 2012 + x = 1006$; $-1006 + x = 1006$; $x=2012$.

2. Дорогу длиной 28 километров разделили на три неравные части. Расстояние между серединами крайних частей равно 16 км. Найдите длину средней части.

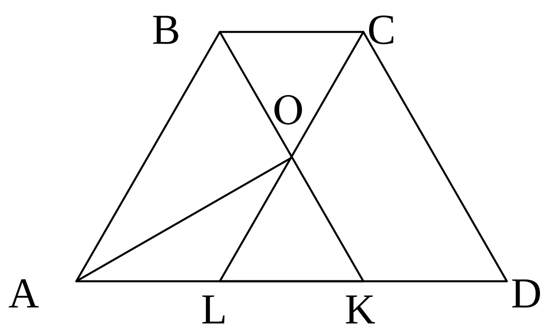
Ответ. 4 км.

Решение. Расстояние между серединами крайних частей складывается из половин крайних участков и целого среднего участка, т.е. удвоенное это число равно длине дороги плюс длина среднего участка. Т.о. длина среднего участка = $16*2-28=4$.

3. Один из углов трапеции равен 60^o. Найдите отношение её оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

Ответ. $1:3$

Решение.



Так как ABCD вписанная, то она равнобедренная, т.е. AB=CD. Так как $\angle BAD=60^0$, *то* $\angle ABC=120^0$. *Центр вписанной окружности лежит в точке O пересечения биссектрис BK и AO углов BAD и ABC. Т.к.* $\angle ABK=60^0=\angle BAK$, *то треугольник ABK – равносторонний, значит, биссектриса AO является медианой в этом треугольнике. Биссектриса OL угла BCD также проходит через точку O. А так как O – середина BK, то OL – средняя линия треугольника ABK (проходит через середину BK и* *параллельно AB), следовательно AL=LK. Аналогично LK=KD. Треугольники BCO и LKO – правильные (углы по 60^0) и их стороны равны (BO=OK), следовательно BC=LK=AL=KD, т.е. 3BC=AD.*

4. Решите числовой ребус: ТЭТА+БЭТА=ГАММА. (Разные буквы – разные цифры.)

   <u>Ответ.</u> 4940+5940=10880

   <u>Решение.</u> Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Т.к. Г – результат переноса в следующий разряд, то Г =1. Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Значит переноса в разряд десятков нет, т.е. Т+Т заканчивается на М, и значит М – четно. Переноса в разряд сотен тоже нет, т.к. иначе нечетное число Э+Э+1 заканчивалось бы на четное М. Т.к. переноса нет, то 2ТБ<10. Возможные варианты 2, 3, 4. Если Т=2, то Э=7, откуда Б=7 – но 7 уже занята. Если Т=3, то М=6, Э=8, откуда Б=6, но 6=М. И последний вариант Т=4. Тогда М=8, Э=9. Откуда Б=5 – противоречия нет. Таким образом, возможен только один вариант: 4940+5940=10880

5. Существует ли натуральное n такое, что число $n^{2012} – 1$ является какой-либо степенью двойки?

   <u>Ответ.</u> Нет, не существует.

   <u>Решение.</u> Преобразуем: $n^{2012} - 1 = (n^{1006})^2 - 1 = (n^{1006} - 1)(n^{1006} + 1)$. Предположим, что данное число является степенью двойки, тогда каждый из двух полученных множителей также является степенью двойки, причем эти множители отличаются на 2. Это возможно только в одном случае, если $n^{1006} - 1 = 2$, а $n^{1006} + 1 = 4$, но таких натуральных n не существует.

6. В пять 15-литровых ведер налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается утроить количество воды в любом сосуде, налив в него воду из какого-нибудь одного другого (если воды не хватает, чтобы утроить количество, то наливать из этого ведра нельзя). Какое наибольшее количество воды можно такими действиями собрать в одном ведре?

<u>Ответ</u>

Ответ зависит от понимания условия ---
можно ли отливать НЕ всё содержимое ведра
(по сути --- можно ли отмерить ОДИН ЛИТР воды)

А) Если нельзя, то ответ 9 литров
Б) Если можно, то ответ 12 литров

<u>Решение:</u>

Вариант А)
Покажем, как собрать в одном из ведер 9 литров:
1, 2, 3, 4, 5 => 1, 6, 3, 0, 5 => 1, 0, 9, 0, 5.

Вариант Б)
Покажем, как собрать в одном из ведер 12 литров:
1, 2, 3, 4, 5 => 1, 6, 3, 4, 1 => 1, 0, 9, 4, 1 => 1, 0, 1, 12, 1

В любом случае, требуется доказать, что это максимальное число (что нельзя получить БОЛЬШЕЕ)

Пусть максимальное число литров равно $n>=9$.

Рассмотрим последнюю операцию с этим ведром (хотя бы одна операция была --- иначе $n<=5$).
Т.к. n – максимальное число литров, то последней операцией не могли отливать из этого ведра
(т.к. иначе до этого там было еще больше), т.е. в него наливали, поэтому n кратно 3.

Во всех ведрах в сумме 15 литров.

Заметим, что после каждого шага есть непустое ведро,
количество литров в котором кратно трём. (*)

Предположим, что $n=15$.
Тогда на предыдущем шаге было ровно два непустых ведра,
в одном из которых 5, а в другом 10 литров.

Но ни одно из этих чисел не кратно 3. Противоречие с (*)

Вариант А)
Предположим, что $n=12$.
Тогда на предыдущем шаге должно было быть два непустых ведра: 4 и 8 литров.

Тогда, в силу условия (*), оставшиеся 3 литра должны были быть в одном ведре.

Но тогда еще на шаг раньше количество воды в ведрах должно было
быть 1, 2, 4, 8, что противоречит условию (*).

Тем самым $n=9$, пример как получить 9 литров приведен выше.

Вариант Б) Тем самым $n=12$, пример как получить 12 литров приведен выше.

Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

11 класс. Краткие решения.

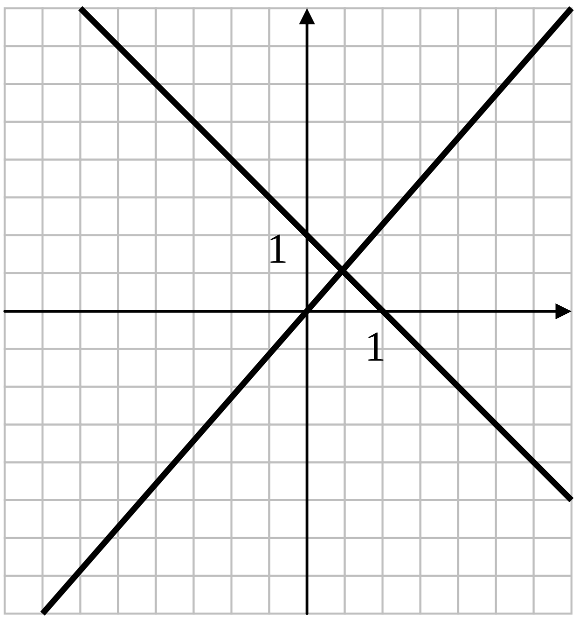
1. Дорогу длиной 28 километров разделили на три неравные части. Расстояние между серединами крайних частей равно 16 км. Найдите длину средней части.

<u>Ответ.</u> 4 км.

*<u>Решение.</u> Расстояние между серединами крайних частей складывается из половин крайних участков и целого среднего участка, т.е. удвоенное это число равно длине дороги плюс длина среднего участка. Т.о. длина среднего участка = 16*2-28=4.*

2. На координатной плоскости (x, y) изобразите множество всех точек, для которых $y^2 - y = x^2 - x$.

<u>Ответ.</u>

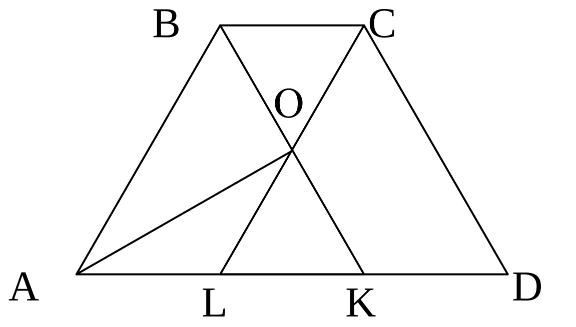


<u>Решение.</u> $y^2 - y = x^2 - x \Leftrightarrow y^2 - x^2 = y - x$ $(y - x)(y + x) = y - x \Leftrightarrow y = x$ *или* $y + x = 1$

3. Один из углов трапеции равен 60^o. Найдите отношение её оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

<u>Ответ.</u> 1:3

<u>Решение.</u>



Так как ABCD вписанная, то она равнобедренная, т.е. AB=CD. Так как $\angle BAD=60^0$, то $\angle ABC=120^0$. Центр вписанной окружности лежит в точке O пересечения биссектрис BK и AO углов BAD и ABC. Т.к. $\angle ABK=60^0=\angle BAK$, то треугольник ABK – равносторонний, значит, биссектриса AO является медианой в этом треугольнике. Биссектриса OL угла BCD также проходит через точку O. А так как O – середина BK, то OL – средняя линия треугольника ABK (проходит через середину BK и параллельно AB), следовательно AL=LK. Аналогично LK=KD. Треугольники BCO и LKO – правильные (углы по 60^0) и их стороны равны (BO=OK), следовательно BC=LK=AL=KD, т.е. 3BC=AD.

4. Существует ли натуральное n такое, что число $n^{2012} - 1$ является какой-либо степенью двойки?

<u>Ответ.</u> Нет, не существует.

<u>Решение.</u> Преобразуем: $n^{2012} - 1 = (n^{1006})^2 - 1 = (n^{1006} - 1)(n^{1006} + 1)$. Предположим, что данное число является степенью двойки, тогда каждый из двух полученных множителей также является степенью двойки, причем эти множители отличаются на 2. Это возможно только в одном случае, если $n^{1006} - 1 = 2$, а $n^{1006} + 1 = 4$, но таких натуральных n не существует.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y + \cos^2 z = 2. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = 1$; $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, *где* $n \in Z$.

<u>Решение</u>. Из первого уравнения x,y оба положительны или оба отрицательны. Но из второго уравнения x+y>=1, поэтому они оба положительны. Тогда, применив неравенство о средних и использовав первое уравнение системы, получим: $x + y \ge 2\sqrt{xy} = 2$. *Так как* $\forall z \in R \; \cos^2 z \ge 0$, *то из второго уравнения следует, что* $x + y = 2$ *и* $\cos z = 0$. *Откуда* $x = y = 1$; $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, *где* $n \in Z$.

Замечание. Можно было не использовать неравенство о средних, а заменить во втором уравнении 2 на 2xy (это можно сделать, т.к. xy=1), перенести в другую часть и выделить полный квадрат.

6. Можно ли сложить сплошную стенку, имеющую форму параллелепипеда с размерами $27 \times 16 \times 15$, а) из кирпичей размером $3 \times 5 \times 7$; б) из кирпичей размером $2 \times 5 \times 6$, если ломать кирпичи нельзя, но можно поворачивать?

<u>Ответ.</u> а) нет; б) нет.

*<u>Решение.</u> а) Заметим, что объем одного кирпича 3*5*7 кратен 7. Из таких кирпичей можно сложить только стенку, объем которой кратен 7. А у нас объем стенки не кратен 7.*

б) Предположим, что выложить можно. Посмотрим на грань стенки размера 27×15. На ней видны следы кирпичей $2 \times 5 \times 6$, т.е. прямоугольники 2×5, 5×6, 2×6 в зависимости от того, какой стороной кирпич примыкает к грани. Таким образом, прямоугольник 27×15 нечетной площади должен быть замощен прямоугольниками 2×5, 5×6, 2×6, площадь каждого из которых четна, – противоречие.