9 класс

Первый день

9.1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b) = x-c$, $(x-b)(x-c) = x-a$, $(x-c)(x-a) = x-b$ имеют решение.

9.2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC.

9.3. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?

9.4. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных. Никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая n-звенная несамопересекающаяся ломаная $A_0A_1A_2 \ldots A_n$, что на каждой из n прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.

9 класс

Первый день

9.1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b)=x-c$, $(x-b)(x-c)=x-a$, $(x-c)(x-a)=x-b$ имеют решение.

9.2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC.

9.3. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?

9.4. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных. Никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая n-звенная несамопересекающаяся ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_n$, что на каждой из n прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.

10 класс

Первый день

10.1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b)=x-c$, $(x-b)(x-c)=x-a$, $(x-c)(x-a)=x-b$ имеют решение.

10.2. На окружности отметили n точек, разбивающие её на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n *новых точек*, разбивающих окружность на n *новых дуг.* Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.)

10.3. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

10.4. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены такие точки P и Q, что $\angle PDC+\angle PCB=\angle PAB+\angle PBC=\angle QCD+\angle QDA=\angle QBA+\angle QAD=90^\circ$. Докажите, что прямая PQ образует равные углы с прямыми AD и BC.

10 класс

Первый день

10.1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b)=x-c$, $(x-b)(x-c)=x-a$, $(x-c)(x-a)=x-b$ имеют решение.

10.2. На окружности отметили n точек, разбивающие её на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n *новых точек*, разбивающих окружность на n *новых дуг*. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.)

10.3. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

10.4. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены такие точки P и Q, что $\angle PDC+\angle PCB=\angle PAB+\angle PBC=\angle QCD+\angle QDA=\angle QBA+\angle QAD=90^\circ$. Докажите, что прямая PQ образует равные углы с прямыми AD и BC.

11 класс

Первый день

11.1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x + 1) = Q(x - 1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

11.2. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный. (Вневписанная сфера пирамиды касается одной её грани, а также плоскостей остальных граней вне этих граней.)

11.3. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k нечётных простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

11.4. На каждой из 2013 карточек написано по числу, все эти 2013 чисел различны. Карточки перевёрнуты числами вниз. За один ход разрешается указать на десять карточек, и в ответ сообщат одно из чисел, написанных на них (неизвестно, какое). Для какого наибольшего t гарантированно удастся найти t карточек, про которые известно, какое число написано на каждой из них?

11 класс

Первый день

11.1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

11.2. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный. (Вневписанная сфера пирамиды касается одной её грани, а также плоскостей остальных граней вне этих граней.)

11.3. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k нечётных простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

11.4. На каждой из 2013 карточек написано по числу, все эти 2013 чисел различны. Карточки перевёрнуты числами вниз. За один ход разрешается указать на десять карточек, и в ответ сообщат одно из чисел, написанных на них (неизвестно, какое). Для какого наибольшего t гарантированно удастся найти t карточек, про которые известно, какое число написано на каждой из них?