Материалы для проведения заключительного этапа

XXXIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2012–2013 учебный год

Первый день

Саров,
23–29 апреля 2013 г.

Москва, 2013

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Акопян, А. В. Антропов, Д. С. Бабичев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. И. Гарбер, А. С. Голованов, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, Р. Г. Женодаров, Г. М. Иванов, Ф. А. Ивлев, П. А. Кожевников, М. А. Кунгожин, А. Н. Магазинов, И. В. Митрофанов, В. Б. Мокин, Е. Г. Молчанов, В. А. Омельяненко, А. В. Пастор, А. А. Пахарев, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, В. А. Сендеров, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, В. А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b)=x-c$, $(x-b)(x-c)=x-a$, $(x-c)(x-a)=x-b$ имеют решение. (*И. Богданов*)

Первое решение. Обозначим $f_1(x)=(x-b)(x-c)-(x-a)$, $f_2(x)=(x-c)(x-a)-(x-b)$ и $f_3(x)=(x-a)(x-b)-(x-c)$. Предположим, что утверждение задачи неверно, то есть максимум у одной из этих функций есть корень. Значит, две из них — скажем, f_1 и f_2 — корней не имеют. Поскольку старшие коэффициенты этих квадратных многочленов положительны, получаем, что $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$ при всех x. Однако многочлен

$$f_1(x)+f_2(x)=(x-c)(x-b+x-a)-(x-a+x-b)=$$
$$=(2x-a-b)(x-c-1)$$

имеет, например, корень $x_0=c+1$; значит, неверно, что $f_1(x_0)>0$ и $f_2(x_0)>0$. Противоречие.

Второе решение. Пусть для определённости $a<b<c$. Рассмотрим графики функций $f_{bc}(x)=(x-b)(x-c)$ и $f_a(x)=x-a$. При $x=a$ точка первого графика выше точки второго: $f_{bc}(a)=(a-b)(a-c)>0=f_a(a)$, а при $x=b$ — ниже: $f_{bc}(b)=0<b-a=f_a(b)$. Значит, уравнение $f_{bc}(x)=f_a(x)$ имеет корень на отрезке $[a,b]$ (см. рис. 1).

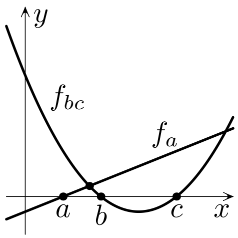

Рис. 1

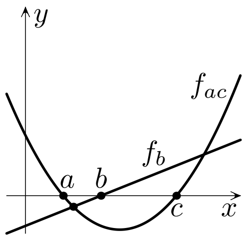

Рис. 2

Аналогично, если рассмотреть графики функций $f_{ac}(x)=(x-a)(x-c)$ и $f_b(x)=x-b$, то получим, что $f_{ac}(a)>f_b(a)$

и $f_{ac}(b) < f_b(b)$, так что уравнение $f_{ac}(x) = f_b(x)$ также имеет корень на отрезке $[a, b]$ (см. рис. 2).

Третье решение. Как и в первом решении, предположим, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имеют корней. Тогда их дискриминанты отрицательны, то есть $(b+c+1)^2 < 4(bc+a)$ и $(c+a+1)^2 < 4(ca+b)$. Эти неравенства переписываются в виде $(b-c-1)^2 < 4a-4b$ и $(c-a+1)^2 < 4b-4a$. Значит, оба числа в правых частях положительны; однако их сумма равна нулю. Противоречие.

9.2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC. (*П. Кожевников*)

Решение. Пусть M — середина BC. Треугольник BPC равнобедренный ($BP = PC$ как отрезки касательных); значит, его медиана PM является высотой. Так как $\angle PMC = \angle PEC = 90°$, четырёхугольник $MCEP$ — вписанный; значит, $\angle MEP = \angle MCP$. Далее, CP — касательная к Ω, поэтому $\angle MCP = \angle BAC$. Получаем, что $\angle MEP = \angle BAC$. Значит, $\angle MEA + \angle BAC = (90° - \angle MEP) + \angle BAC = 90°$, откуда $ME \perp AB$ (см. рис. 3).

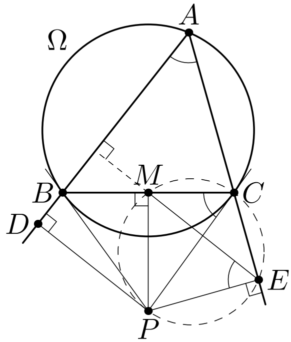

Рис. 3

Аналогично доказывается, что $MD \perp AC$. Это и значит, что M — точка пересечения высот треугольника ADE.

9.3. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$? (*С. Берлов*)

Ответ. 99.

Первое решение. Если положить $a_{100} = 1$ и $a_i = 2i$ при $i = 1, 2, \ldots, 99$, то $b_1 = b_{100} = 3$, так что среди чисел b_i будет не больше 99 различных. Осталось доказать, что среди чисел b_i всегда найдутся 99 различных чисел.

Без ограничения общности можно считать, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$. Пусть d_i — наибольший общий делитель всех 99 исходных чисел, кроме a_i; тогда $b_i = a_i + d_i$. Пусть d_k — наибольшее из чисел $d_1, d_2, \ldots, d_{100}$. Тогда при $i \neq k$ числа a_i делятся на d_k. Следовательно, при $i < j$ и $i \neq k \neq j$ разность $a_j - a_i$ также делится на d_k. Поскольку она положительна, $a_j - a_i \geqslant d_k \geqslant d_i$. Поэтому

$$b_j > a_j \geqslant a_i + d_i = b_i,$$

откуда $b_i \neq b_j$. Итак, мы установили, что $b_j \neq b_i$ при $i \neq k \neq j$. Стало быть, все 99 чисел b_i при $i \neq k$ различны.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что среди чисел b_i хотя бы 99 различных. Мы снова будем пользоваться обозначением d_i из предыдущего решения; также мы будем считать, что $a_1 < \ldots < a_{100}$.

Обозначим $c_i = a_{i+1} - a_i$. Пусть c_ℓ — минимальное из чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{99}$. Покажем, что если $i < j$ и $i \neq \ell + 1 \neq j$, то числа b_i и b_j различны. Отсюда, опять же, будет следовать требуемое.

Предположим, что $i < j - 1$. Тогда $i \leqslant 98$, и числа a_{i+1} и a_{i+2} делятся на d_i. Значит, $d_i \leqslant a_{i+2} - a_{i+1} < a_j - a_i$, откуда

$$b_i = a_i + d_i < a_i + (a_j - a_i) = a_j < b_j.$$

Пусть теперь $j = i + 1$. Тогда $i \neq \ell + 1$ и $i \neq \ell$ (поскольку $j \neq \ell + 1$). Значит, числа a_ℓ и $a_{\ell+1}$ делятся на d_i. Отсюда $d_i \leqslant a_{\ell+1} - a_\ell = c_\ell \leqslant c_i$, что влечёт за собой

$$b_i = a_i + d_i \leqslant a_i + c_i = a_{i+1} = a_j < b_j.$$

Итак, в обоих случаях мы получили, что $b_i < b_j$, что и требовалось.

9.4. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных. Никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая n-звенная несамопересекающаяся ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_n$, что на каждой из n прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной. (*фольклор*)

Решение. Докажем более сильный факт. Пусть A_0 — произвольная точка на одной из данных прямых, через которую не проходит ни одна из остальных прямых. Мы докажем, что существует требуемая ломаная, начинающаяся с A_0.

Индукция по n. Если $n = 1$, то ломаная (из одного отрезка) строится тривиально. Пусть $n \geqslant 2$, данные прямые — $\ell_1, \ldots, \ell_n$, и A_0 лежит на ℓ_n. Пусть A_1 — ближайшая к A_0 точка пересечения ℓ_n с остальными прямыми (если ближайших точек две, выберем любую из них); скажем, $A_1 = \ell_n \cap \ell_{n-1}$. По условию, через A_1 не проходит других данных прямых.

Выбросим из рассмотрения ℓ_n. По предположению индукции, существует несамопересекающаяся ломаная $A_1A_2\ldots A_n$, начинающаяся с A_1 и содержащая по одному звену на каждой из прямых $\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}$. Докажем, что $A_0A_1\ldots A_n$ — требуемая ломаная. Действительно, по одному её звену лежит на $\ell_1, \ldots, \ell_n$; осталось показать, что она несамопересекающаяся. Если это не так, то отрезок A_0A_1 пересекается с каким-то другим отрезком ломаной (отличным от A_1A_2), и, значит, на A_0A_1 есть точка пересечения с одной из прямых $\ell_1, \ldots, \ell_{n-2}$. Но это противоречит выбору точки A_1. Переход индукции доказан.

10 класс

10.1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b)=x-c$, $(x-b)(x-c)=$ $=x-a$, $(x-c)(x-a)=x-b$ имеют решение. (*И. Богданов*)

Первое решение. Обозначим $f_1(x)=(x-b)(x-c)-(x-a)$, $f_2(x)=(x-c)(x-a)-(x-b)$ и $f_3(x)=(x-a)(x-b)-(x-c)$. Предположим, что утверждение задачи неверно, то есть максимум у одной из этих функций есть корень. Значит, две из них — скажем, f_1 и f_2 — корней не имеют. Поскольку старшие коэффициенты этих квадратных многочленов положительны, получаем, что $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$ при всех x. Однако многочлен

$$f_1(x)+f_2(x)=(x-c)(x-b+x-a)-(x-a+x-b)=$$
$$=(2x-a-b)(x-c-1)$$

имеет, например, корень $x_0=c+1$; значит, неверно, что $f_1(x_0)>0$ и $f_2(x_0)>0$. Противоречие.

Второе решение. Пусть для определённости $a<b<c$. Рассмотрим графики функций $f_{bc}(x)=(x-b)(x-c)$ и $f_a(x)=$ $=x-a$. При $x=a$ точка первого графика выше точки второго: $f_{bc}(a)=(a-b)(a-c)>0=f_a(a)$, а при $x=b$ — ниже: $f_{bc}(b)=$ $=0<b-a=f_a(b)$. Значит, уравнение $f_{bc}(x)=f_a(x)$ имеет корень на отрезке $[a,b]$ (см. рис. 4).

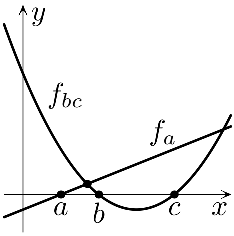

Рис. 4

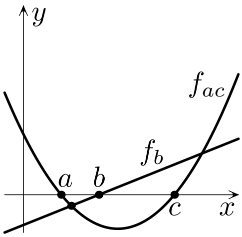

Рис. 5

Аналогично, если рассмотреть графики функций $f_{ac}(x)=$ $=(x-a)(x-c)$ и $f_b(x)=x-b$, то получим, что $f_{ac}(a)>f_b(a)$ и $f_{ac}(b)<f_b(b)$, так что уравнение $f_{ac}(x)=f_b(x)$ также имеет корень на отрезке $[a,b]$ (см. рис. 2).

Третье решение. Как и в первом решении, предположим, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имеют корней. Тогда их дискриминанты отрицательны, то есть $(b+c+1)^2 < 4(bc+a)$ и $(c+a+1)^2 < 4(ca+b)$. Эти неравенства переписываются в виде $(b-c-1)^2 < 4a-4b$ и $(c-a+1)^2 < 4b-4a$. Значит, оба числа в правых частях положительны; однако их сумма равна нулю. Противоречие.

10.2. На окружности отметили n точек, разбивающие её на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n *новых точек*, разбивающих окружность на n *новых дуг*. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.) (*И. Митрофанов*)

Решение. Мы будем считать, что радиус окружности равен 1, а поворот происходил по часовой стрелке. Если две новых точки лежат на одной старой дуге, то новая дуга между ними — требуемая. Предположим, что таких новых точек нет. Так как есть n старых дуг и n новых точек, это возможно только в случае, когда на каждой старой дуге лежит ровно по одной новой точке (причём эти точки не совпадают с концами старых дуг).

Занумеруем старые точки по часовой стрелке $A_1, A_2, \ldots, A_n$; пусть при повороте точка A_i переходит в новую точку B_i (мы считаем нумерацию циклической, то есть $A_{n+i} = A_i$ и $B_{n+i} = B_i$). Пусть точка B_1 лежит на дуге A_jA_{j+1}; так как на каждой старой дуге ровно по одной новой точке, соседние точки попадали на соседние дуги. Получаем, что при любом i точка B_i лежит на дуге $A_{j+i-1}A_{j+i}$.

Предположим, что $j \leqslant k$. Заметим, что все дуги вида $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j}$ покрывают окружность ровно в j слоёв; значит, сумма их длин равна $2\pi j \leqslant 2\pi k$. С другой стороны, длина дуги $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j}$ строго больше длины дуги A_iB_i, которая равна $2\pi k/n$; значит, сумма их длин строго больше, чем $n \cdot 2\pi k/n = 2\pi k$; противоречие.

Аналогично, если $j > k$, то сумма длин всех дуг вида $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j-1}$ равна $2\pi(j-1) \geqslant 2\pi k$; с другой стороны, она строго меньше, чем сумма длин дуг вида A_iB_i, которая равна $2\pi k$. Опять получаем противоречие.

10.3. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая). (*В. Сендеров*)

Ответ. $k = 1$.

Решение. Пусть $n \geqslant 2$, и $2 = p_1 < \ldots < p_k$ — первые k простых чисел. Предположим, что

$$p_1p_2\ldots p_k = a^n + 1. \qquad (*)$$

Если $a = 1$, то $a^n + 1 = 2$ и, следовательно, $k = 1$.

Предположим теперь, что $a > 1$; тогда $k > 1$. Число a нечётно, поэтому у него существует нечётный простой делитель q. Тогда $q > p_k$, иначе левая часть равенства $(*)$ делилась бы на q, что невозможно. Поэтому и $a > p_k$.

Без ограничения общности можно считать, что n — простое число (если $n = st$, то можно заменить n на t, а a — на a^s). Заметим, что $n > 2$, поскольку a^2+1 не может делиться на $3 = p_2$.

Покажем теперь, что $n > p_k$. В противном случае имеем $n = p_i$ при некотором $1 < i \leqslant k$. Тогда $a^{p_i} + 1 \,\vdots\, p_i$; с другой стороны, по малой теореме Ферма $a^{p_i} - a \,\vdots\, p_i$. Значит, число $a + 1 = (a^{p_i} + 1) - (a^{p_i} - a)$ также делится на p_i. Заметим, что $1 + a^{p_i} = (1 + a)(1 - a + \ldots + a^{p_i-1})$, где $a + 1 \,\vdots\, p_i$ и

$$1 - a + \ldots + a^{p_i-1} \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 = p_i \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Значит, число $1+a^{p_i}$ делится на p_i^2, что невозможно по условию.

Итак, $a > p_k$ и $n > p_k$, откуда $a^n + 1 > p_k^{p_k} > p_1p_2\ldots p_k$, что противоречит равенству $(*)$.

10.4. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены такие точки P и Q, что $\angle PDC + \angle PCB = \angle PAB + \angle PBC = \angle QCD + \angle QDA = \angle QBA + \angle QAD = 90^\circ$. Докажите, что прямая PQ образует равные углы с прямыми AD и BC.

(*А. Пастор*)

Решение. Обозначим окружности, описанные около четырёхугольника $ABCD$ и треугольников ABP, CDP, ABQ, CDQ через Ω, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 соответственно (см. рис. 6).

Пусть X — проекция P на BC; обозначим прямую PX че-

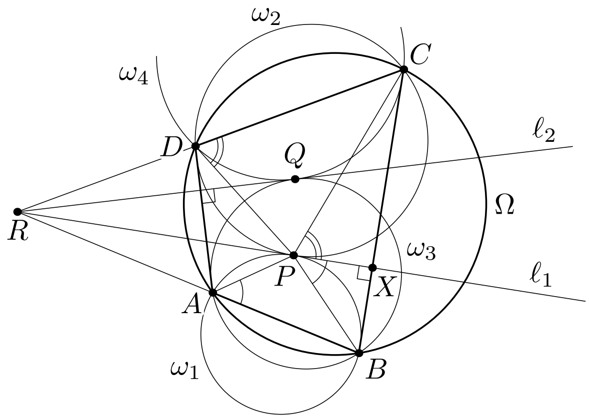

Рис. 6

рез ℓ_1. Тогда $\angle BPX = 90^\circ - \angle PBC = \angle PAB$; значит, прямая ℓ_1 касается окружности ω_1. Аналогично, ℓ_1 касается окружности ω_2; итак, прямая ℓ_1 и окружности ω_1, ω_2 касаются в точке P. Аналогично получаем, что прямая ℓ_2, проходящая через Q и перпендикулярная AD, и окружности ω_3 и ω_4 касаются в точке Q.

Предположим, что прямые AB и CD пересекаются в некоторой точке R. Покажем, что прямая RP совпадает с ℓ_1. Обозначим через P_1 и P_2 вторые точки пересечения прямой RP с ω_1 и ω_2 (таким образом, $P_1 = P$, если RP касается ω_1; аналогично для P_2). Тогда $RP \cdot RP_1 = RA \cdot RB = RD \cdot RC = RP \cdot RP_2$, то есть $P_1 = P_2$. Так как P — единственная общая точка ω_1 и ω_2, то $P_1 = P_2 = P$. Значит, RP совпадает с ℓ_1, т.е. $RP^2 = RA \cdot RB$.

Аналогично можно показать, что RQ совпадает с ℓ_2, и $RQ^2 = RA \cdot RB$. Следовательно, $RP^2 = RA \cdot RB = RQ^2$, то есть треугольник PQR — равнобедренный и его основание PQ образует равные углы с прямыми QR и PR, а значит — и с перпендикулярными им прямыми AD и BC.

Осталось рассмотреть случай, когда стороны AB и CD параллельны. В этом случае четырёхугольник $ABCD$ является равнобокой трапецией или прямоугольником. Этот четырёхугольник и все рассматриваемые окружности симметричны относительно общего серединного перпендикуляра к AB и CD.

Следовательно, точки P и Q лежат на этой прямой, а она, очевидно, образует равные углы с прямыми AD и BC.

Замечание. В данной конструкции R — общий радикальный центр (то есть точка пересечения попарных радикальных осей) окружностей Ω, ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4.

11 класс

11.1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть $P(x) = x^{10} + p_9x^9 + \ldots + p_0$ и $Q(x) = x^{10} + q_9x^9 + \ldots + q_0$. Тогда многочлен $P(x) - Q(x) = (p_9 - q_9)x^9 + \ldots + (p_0 - q_0)$ не имеет действительных корней; но, если $p_9 \neq q_9$, то степень этого многочлена нечётна, и корень у него есть. Значит, $p_9 = q_9$.

Заметим теперь, что $P(x+1) = x^{10} + (p_9 + 10)x^9 + \ldots$ и $Q(x-1) = x^{10} + (q_9 - 10)x^9 + \ldots$; значит, многочлен $P(x+1) - Q(x-1) = 20x^9 + \ldots$ имеет девятую степень и, следовательно, имеет корень.

11.2. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный. (Вневписанная сфера пирамиды касается одной её грани, а также плоскостей остальных граней вне этих граней.) (*В. Шмаров*)

Первое решение. Пусть X — точка касания плоскости (BCD) со вписанной сферой. Пусть гомотетия с центром в точке A, переводящая вневписанную сферу во вписанную, переводит точку Y в некоторую точку Z вписанной сферы. Эта гомотетия переводит плоскость (BCD) в плоскость, параллельную (BCD) и касающуюся вписанной сферы в точке Z. Это означает, что X и Z — диаметрально противоположные точки вписанной сферы, а следовательно, $XZ \perp (BCD)$. Поскольку Z лежит на отрезке AY, то $\angle AXY > \angle ZXY = 90°$, откуда и следует требуемое.

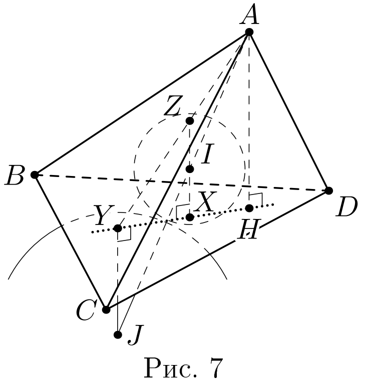

Рис. 7

Второе решение. Пусть I и J — соответственно центры вписанной и вневписанной сфер, и пусть AH — высота пирамиды. Точки A, I и J лежат на одной прямой (все точки которой равноудалены от плоскостей (ABC), (ACD) и (ADB)), причём I лежит между A и J. Значит, их проекции H, X и Y на плоскость (BCD) также лежат на одной прямой, причём X лежит между H и Y. Итак, основание высоты AH треугольника AXY лежит вне стороны XY; это и значит, что этот треугольник тупоугольный.

11.3. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k нечётных простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

(*В. Сендеров*)

Ответ. Таких k не существует.

Решение. Пусть $n \geqslant 2$, и $3 = p_1 < \ldots < p_k$ — первые k нечётных простых чисел. Предположим, что

$$3 \cdot \ldots \cdot p_k = a^n + 1. \qquad (*)$$

Возможны два случая.

Случай 1. Пусть a является степенью двойки. Заметим, что степени двойки дают лишь остатки 1, 2 и 4 при делении на 7, а $a^n + 1$ делится на 7 при $k \geqslant 3$. Значит, $k \leqslant 2$, и возможными значениями для a^n являются лишь $3 - 1 = 2$ и $3 \cdot 5 - 1 = 14$. Оба варианта не подходят.

Случай 2. Пусть у числа a существует нечётный простой делитель q. Тогда $q > p_k$, иначе левая часть равенства $(*)$ делилась бы на q, что невозможно. Поэтому и $a > p_k$.

Без ограничения общности можно считать, что n — простое число (если $n = st$, то можно заменить n на t, а a — на a^s). Заметим, что $n > 2$, поскольку $a^2 + 1$ не может делиться на $3 = p_1$.

Покажем теперь, что $n > p_k$. В противном случае имеем $n = p_i$ при некотором $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда $a^{p_i} + 1 \,\vdots\, p_i$; с другой стороны, по малой теореме Ферма $a^{p_i} - a \,\vdots\, p_i$. Значит, число $a + 1 = (a^{p_i} + 1) - (a^{p_i} - a)$ также делится на p_i. Заметим, что $1 + a^{p_i} = (1 + a)(1 - a + \ldots + a^{p_i - 1})$, где $a + 1 \,\vdots\, p_i$ и

$$1 - a + \ldots + a^{p_i - 1} \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 = p_i \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Значит, число $1+a^{p_i}$ делится на p_i^2, что невозможно по условию.

Итак, $a > p_k$ и $n > p_k$, откуда $a^n + 1 > p_k^{p_k} > 3 \cdot \ldots \cdot p_k$, что противоречит равенству $(*)$.

11.4. На каждой из 2013 карточек написано по числу, все эти 2013 чисел различны. Карточки перевёрнуты числами вниз. За один ход разрешается указать на десять карточек, и в ответ сообщат одно из чисел, написанных на них (неизвестно, какое). Для какого наибольшего t гарантированно удастся найти t карточек, про которые известно, какое число написано на каждой из них?

(*И. Богданов*)

Ответ. $t = 1986 = 2013 - 27$.

Решение. 1. Покажем сначала, что 1987 карточек угадать не удастся. Занумеруем карточки $A_1, \ldots, A_{2013}$; покажем, как устроить ответы так, чтобы ни одно из чисел на карточках $A_1, \ldots, A_{27}$ определить не удалось.

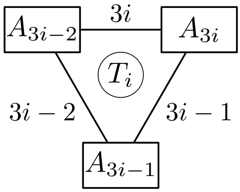

Рис. 8

При каждом $i = 1, \ldots, 9$ объединим карточки A_{3i-2}, A_{3i-1}, A_{3i} в тройку T_i. Если среди указанных 10 карточек присутствует карточка A_n с $n > 27$, то ответим число n. Если же все 10 карточек лежат в тройках, то в какой-то тройке T_i лежат хотя бы две карточки; в этом случае мы ответим число, стоящее на ребре между этими карточками на рис. 8. Этим ответам удовлетворяют такие две ситуации: на карточках с номерами, большими 27, написаны их номера, и либо на каждой карточке из троек стоит число на ребре, выходящем из неё против часовой стрелки, либо на каждой такой карточке стоит число на ребре по часовой стрелке. Значит, ни одного из чисел на карточках в тройках определить нельзя.

2. Осталось доказать, что числа на всех карточках, кроме 27, определить удастся. Для этого мы покажем, что если задать все возможные вопросы о каких-то 28 карточках, то по ответам удастся определить число на одной из них. После этого эту карточку можно будет заменить на одну из оставшихся и повторить

процедуру; действуя так, мы в результате определим числа на всех карточках, кроме 27.

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть в графе не менее, чем $3n-2$ вершины, и не более, чем $3n-2$ ребра ($n \geqslant 2$). Тогда найдутся n вершин, между которыми нет рёбер.*

Доказательство. Индукция по n. Сразу заметим, что можно выкинуть несколько вершин и после этого добавить несколько рёбер так, чтобы вершин и рёбер стало по $3n-2$. При $n=2$ на 4 вершинах меньше 6 рёбер; значит, какая-то пара вершин не соединена, и можно выбрать эти две вершины.

Пусть теперь $n > 2$. Обозначим степени вершин через $d_1, \ldots, d_{3n-2}$; тогда $d_1 + \ldots + d_{3n-2} = 2(3n-2)$. Значит, либо найдётся число $d_i < 2$ и число $d_j > 2$, либо все степени равны 2. В первом случае выкинем из графа i-ю и j-ю вершину, а также единственного соседа i-й вершины (если он есть); мы выкинули не более 3 вершин и не менее 3 рёбер. Во втором случае выкинем произвольную вершину (пусть её номер равен i) и двух её соседей; так как их степени равны 2, то опять же мы выкинули не менее 3 рёбер (и ровно 3 вершины). В оставшемся графе по предположению индукции найдутся $n-1$ вершина без рёбер между ними; добавив к ним i-ю вершину, получаем требуемый набор из n вершин (поскольку мы выкинули всех соседей i-й вершины). Лемма доказана. $\square$

Вернёмся к решению. Пусть мы задали все вопросы о 28 карточках, и пусть $c_1, \ldots, c_k$ — все числа, встречающиеся в ответах (тогда $k \leqslant 28$). Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ рассмотрим все десятки карточек, в ответ на которые мы получали число c_i; обозначим их пересечение через S_i (ясно, что это множество непусто, ибо оно содержит карточку с числом c_i). Если в этом множестве один элемент, то это и есть карточка с числом c_i, и мы определили число на ней.

В противном случае, в каждом из множеств хотя бы по две карточки. При каждом i выберем две карточки в S_i и соединим их ребром. Мы получили граф, удовлетворяющий условию леммы при $n = 10$; значит, в нём можно выбрать 10 карточек без рёбер между ними. Ответом на эту десятку было какое-то число c_i. Значит, в этой десятке должно содержаться множество S_i, а значит, две карточки из десятки соединены соответствующим ребром. Противоречие, завершающее решение задачи.