Материалы для проведения заключительного этапа

XLI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2014–2015 учебный год

Второй день

Казань, 23–29 апреля 2015 г.

Москва, 2015

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, Н. В. Богачёв, И. И. Богданов, А. С. Волостнов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гаврилюк, А. С. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, Л. А. Емельянов, Г. М. Иванов, П. А. Кожевников, А. Н. Магазинов, И. В. Митрофанов, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензенты: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв, к. ф.-м. н. Б. В. Трушин.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. По кругу записаны 100 целых чисел. Каждое из чисел больше суммы двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди записанных? (*С. Берлов*)

Ответ. 49.

Решение. Предположим, что два неотрицательных числа стоят рядом. Тогда число, стоящее перед ними, больше их суммы, то есть оно положительно. Аналогично, число перед ним также положительно, и т. д. В итоге получаем, что все числа неотрицательны; но тогда наименьшее из них не может быть больше суммы двух следующих — противоречие.

Итак, среди любых двух чисел подряд есть хотя бы одно отрицательное. Значит, положительных чисел не более 50. Пусть их ровно 50, тогда они чередуются с отрицательными. Рассмотрим теперь три числа $-a$, b, $-c$, стоящие подряд (здесь $a, b, c > 0$). Тогда $-a > b - c > -c$, то есть любое отрицательное число строго больше следующего за ним отрицательного числа. Поскольку числа стоят по кругу, это невозможно. Стало быть, положительных чисел не более 49.

Осталось привести пример, в котором ровно 49 положительных чисел. Годится, например, такая расстановка:

$$-200,\ 1,\ -202,\ 1,\ -204,\ 1,\ -206,\ 1,\ \ldots,\ -296,\ 1,\ -298,\ -99.$$

9.6. Поле представляет собой клетчатый квадрат 41×41, в одной из клеток которого замаскирован танк. Истребитель за один выстрел обстреливает одну клетку. Если произошло попадание, танк переползает на соседнюю по стороне клетку поля, если нет — остаётся на месте. При этом после выстрела пилот истребителя не знает, произошло ли попадание. Для уничтожения танка надо попасть в него два раза. Каким наименьшим числом выстрелов можно обойтись для того, чтобы гарантировать, что танк уничтожен? (*С. Берлов, А. Магазинов*)

Ответ. $\dfrac{3\cdot 41^2-1}{2}=2521$ выстрелов.

Решение. Окрасим клетки в шахматном порядке так, чтобы углы поля были чёрными. Пусть пилот сначала выстрелит по всем белым полям, затем по всем чёрным, а затем снова по всем белым. Если танк был на белом поле, то пилот его подобьёт в первой и второй сериях; если же на чёрном — то во второй и третьей сериях. При этом пилот совершит $41^2+\dfrac{41^2-1}{2}=\dfrac{3\cdot 41^2-1}{2}$ выстрелов.

Осталось показать, что меньшим числом выстрелов не обойтись. Пусть у пилота есть последовательность выстрелов, после которой танк будет гарантированно уничтожен. Ясно, что по любой клетке он должен выстрелить хотя бы раз (иначе танк в этой клетке не будет уничтожен).

Предположим, что есть две соседних клетки A и B, по которым он стрелял ровно по разу, причём выстрел по B произошёл позже. Тогда, если танк изначально находился в B, он мог после выстрела по B переползти в A, и второго попадания не произошло бы. Это невозможно; значит, таких пар клеток нет.

Разобьём теперь всю доску на $\dfrac{41^2-1}{2}$ прямоугольников 1×2 и одну клетку. По доказанному, в каждый прямоугольник истребитель должен сделать как минимум три выстрела, а в оставшуюся клетку — хотя бы один выстрел. Итого, он сделал не менее, чем $3\cdot\dfrac{41^2-1}{2}+1=\dfrac{3\cdot 41^2-1}{2}$ выстрелов.

9.7. Остроугольный треугольник ABC $(AB<AC)$ вписан в окружность Ω. Пусть M — точка пересечения его медиан, а AH — высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A'. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB. *(А. И. Голованов, А. Якубов)*

Решение. Выберем на Ω точку D так, что $AD\parallel BC$ (см. рис. 1); тогда точки A и D симметричны относительно серединного перпендикуляра к BC. Пусть H' — проекция точки D на BC, а K — середина BC. Из симметрии, K также является серединой отрезка HH'; кроме того, $HH'=AD$.

Пусть X — точка пересечения отрезков AK и DH. Тогда треугольники ADX и KHX подобны, откуда $\dfrac{AX}{KX}=\dfrac{AD}{KH}=$

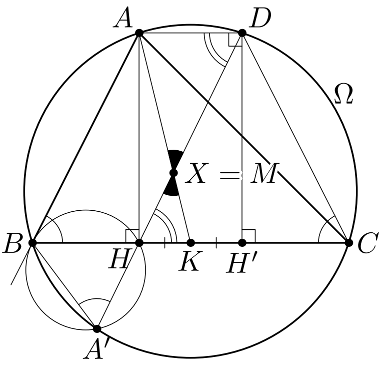

Рис. 1

$= \frac{2KH}{KH} = 2$. Значит, X — точка пересечения медиан треугольника ABC, то есть $X = M$. Итак, точки A', H, M и D лежат на одной прямой.

Из симметрии имеем $\angle ABC = \angle BCD$. Кроме того, $\angle BCD = \angle BA'D$ как опирающиеся на одну дугу. Значит, $\angle ABH = \angle ABC = \angle BA'D = \angle BA'H$. Это и означает, что AB — касательная к окружности, описанной около треугольника $BA'H$.

Замечание. Тот факт, что точки H, M, D (а значит, и A') лежат на одной прямой, можно доказать и по-другому — например, так. Рассмотрим окружность ω, описанную около треугольника с вершинами в серединах сторон AB, BC и CA. Как известно, она проходит через H. При гомотетии с центром в точке M и коэффициентом -2 окружность ω переходит в Ω. Значит, точка H при этой гомотетии перейдет в такую точку D на описанной окружности, что $AD \parallel BC$. Поэтому точки H, M и D лежат на одной прямой.

9.8. На доске написаны $N \geqslant 9$ различных неотрицательных чисел, меньших единицы. Оказалось, что для любых восьми различных чисел с доски на ней найдётся девятое, отличное от них, такое, что сумма этих девяти чисел целая. При каких N это возможно?

(*Ф. Нилов*)

Ответ. Только при $N = 9$.

Решение. Ясно, что при $N = 9$ требуемое возможно — достаточно написать на доску 9 различных положительных чисел с единичной суммой. Покажем, что при $N > 9$ требуемое невозможно. Предположим противное; обозначим через S сумму всех чисел на доске.

Выберем на доске произвольные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ с суммой T; пусть A — множество всех остальных чисел на доске. По условию, для любого числа $\beta \in A$ найдется такое отличное от него число $\gamma \in A$, что число $T + \beta + \gamma$ целое. Скажем, что число γ *соответствует* числу β. Заметим, что такое число γ единственно. Действительно, если бы нашлось другое число $\gamma' \in A$, для которого сумма $T + \beta + \gamma'$ целая, то число $\gamma - \gamma' = (T + \beta + \gamma) - (T + \beta + \gamma')$ также было бы целым; это невозможно, ибо $0 < |\gamma - \gamma'| < 1$.

В частности, отсюда следует, что β соответствует числу γ. Значит, все числа в A разбиваются на пары чисел (β_1, γ_1), $\ldots$, $(\beta_\ell, \gamma_\ell)$, соответствующих друг другу. При этом $\ell > 1$, так как $N = 7 + 2\ell > 9$.

Рассмотрим теперь сумму

$$\Sigma = (T + \beta_1 + \gamma_1) + (T + \beta_2 + \gamma_2) + \ldots + (T + \beta_\ell + \gamma_\ell).$$

Тогда Σ — целое число. С другой стороны, каждое число из A входит в Σ ровно по разу; значит, $\Sigma = \ell T + (S - T) = S + (\ell - 1)T$, откуда $T = \frac{\Sigma - S}{\ell - 1}$.

Выбрав теперь на доске числа $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_8$ и обозначая их сумму через T', аналогично получаем, что $T' = \frac{\Sigma' - S}{\ell - 1}$ при целом Σ'. Значит,

$$\alpha_1 - \alpha_8 = \frac{\Sigma - S}{\ell - 1} - \frac{\Sigma' - S}{\ell - 1} = \frac{\Sigma - \Sigma'}{\ell - 1}\,.$$

Так как α_1 и α_8 могли быть любыми двумя числами на доске, получаем, что разность любых двух чисел на доске имеет вид $\frac{k}{\ell - 1}$ при целом k.

Пусть теперь μ — наименьшее число на доске. Тогда на доске могут присутствовать лишь числа $\mu, \mu + \frac{1}{\ell - 1}, \ldots, \mu + \frac{\ell - 2}{\ell - 1}$ (все бóльшие числа будут уже не меньше 1) — всего ℓ чисел. Однако общее количество чисел на доске равно $N = 7 + 2\ell > \ell$; значит, они не могут быть различными. Противоречие.

10 класс

10.5. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток. (*С. Волчёнков*)

Решение. Пусть сторона квадрата равна m. По условию, $m \cdot m = n \cdot k$. Пусть $d = \text{НОД}(m, n)$; тогда $m = m_1 d$, $n = n_1 d$, где $\text{НОД}(m_1, n_1) = 1$; при этом $m_1 m = n_1 k$. Первые сомножители в обеих частях последнего равенства взаимно просты, следовательно, m делится на n_1.

Это значит, что квадрат можно разделить на горизонтальные полосы шириной n_1 и на вертикальные полосы шириной d. При этом он разобьётся на равные прямоугольники из $n_1 d = n$ клеток, что и требовалось.

10.6. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов этой последовательности делится на $k+1$? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, что нашлась такая последовательность $a_1, a_2, a_2, \ldots$.

Пусть k — любое натуральное число, большее 1. Рассмотрим первые $2k-1$ членов последовательности a_1, a_2, $\ldots$, a_{2k-1}. По нашему предположению, сумма $a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}$ делится на $2k$, а каждая из сумм $a_2+a_3+\ldots+a_k$ и $a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{2k-1}$ делится на k. Таким образом, получаем, что a_1 делится на k при всех k. Это невозможно.

10.7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Окружность, описанная около треугольника PMQ, пересекает прямую BC вторично в точке X. Докажите, что $BH = CX$. (*М. Дидин*)

Первое решение. Пусть P' и Q' — точки, симметричные соответственно точкам P и Q относительно M. Рассмотрим треугольник MQP'. В нём $QB \perp MP'$ по условию; кроме того, $PBP'C$ — параллелограмм, так что $P'B \parallel PC \perp QM$. Поэтому B — точка пересечения высот треугольника MQP', то есть $P'Q \perp MB$. Аналогично, $MC \perp PQ'$.

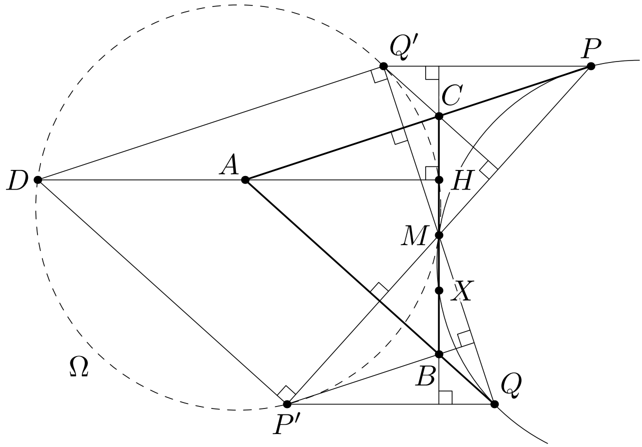

Рис. 2

Заметим, что $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{QP'}$, так как $PQP'Q'$ — параллелограмм. Отложим от A вектор $\overrightarrow{AD}$, равный этим двум векторам. Тогда $P'D \parallel AQ \perp MP'$, $Q'D \parallel AP \perp MQ'$ и $DH \perp MH$. Значит, точки P', Q' и H лежат на окружности Ω с диаметром DM. При симметрии относительно M окружность Ω переходит в окружность Ω', описанную около треугольника PMQ. При этом точка H, лежащая на Ω, переходит во вторую точку пересечения Ω' и BC, то есть в X. Отсюда и следует, что $BH = CX$.

Второе решение. Как и в предыдущем решении, построим точки P' и Q', симметричные соответственно точкам P и Q относительно M. Тогда прямые $P'B$ и $Q'C$ симметричны относительно M прямым PC и QB соответственно. Значит, прямые $P'B$ и $Q'C$ пересекаются в точке A', симметричной A относительно M.

Пусть $P'M$ и $Q'M$ пересекают соответственно стороны AB и AC в точках S и T (см. рис. 3). Применим к треугольникам $P'SB$ и $Q'TC$ теорему Дезарга. Точки пересечения пар прямых $P'S$ и $Q'T$, $P'B$ и $Q'C$, BS и CT лежат на одной прямой; значит, прямые $P'Q'$, ST и BC пересекаются в одной точке или попарно параллельны. Последний случай невозможен, иначе треугольник ABC был бы равнобедренным.

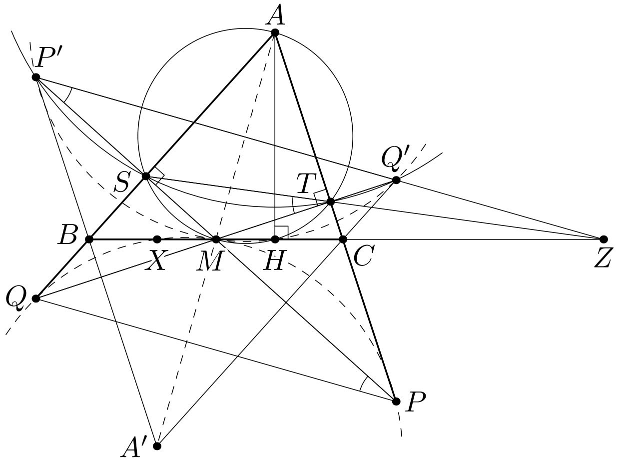

Рис. 3

Пусть Z — общая точка прямых $P'Q'$, ST и BC. Поскольку $\angle PSQ = \angle PTQ = 90^\circ$, точки P, Q, S, T лежат на одной окружности, то есть $\angle QPM = \angle QTS$. Значит, $\angle Q'P'M = \angle QPM = \angle QTS$, то есть и точки P', Q', S, T также лежат на одной окружности; отсюда $ZP' \cdot ZQ' = ZT \cdot ZS$. С другой стороны, точки A, M, S, T, H лежат на окружности с диаметром AM; значит, $ZS \cdot ZT = ZM \cdot ZH$. Отсюда получаем $ZP' \cdot ZQ' = ZT \cdot ZS = ZM \cdot ZH$. Это означает, что точки P', Q', M, H лежат на одной окружности. Эта окружность симметрична окружности, описанной около PMQ, относительно M. Отсюда и следует требуемое.

10.8. У нумизмата есть 100 одинаковых по внешнему виду монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых монет. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых — разные, причём любая фальшивая монета тяжелее настоящей; однако точные массы монет неизвестны. Имеются двухчашечные весы без гирь, на которых можно за одно взвешивание сравнить массы двух групп, состоящих из одинакового числа монет. За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах нумизмат сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету? (*С. Берлов, И. Богданов*)

Ответ. 70.

Решение. 1. Покажем, что за 70 взвешиваний нумизмат сможет найти настоящую монету. Сложим все 100 монет в кучу. Каждым взвешиванием он будет выбирать две монеты из кучи и сравнивать их. Если их массы равны, то обе монеты настоящие, и требуемая монета найдена. Если же нет, то более тяжёлая монета — фальшивая, и её можно выбросить из кучи.

Через 70 таких взвешиваний, если равенства никогда не будет, то в куче останется 30 монет, причём все настоящие останутся в куче. Значит, в этом случае нумизмат даже найдёт все 30 настоящих монет.

2. Предположим теперь, что у нумизмата есть алгоритм, позволяющий гарантированно найти настоящую монету не более, чем за 69 взвешиваний. Мы покажем, что это невозможно — даже в предположении, что массы монет таковы: масса настоящей равна 2^{100}, а масса i-й фальшивой равна $m_i = 2^{100} + 2^i$.

При таком предположении результат любого взвешивания можно определить так. Пусть при некотором взвешивании на чашках по k монет, среди которых $d > 0$ фальшивых, имеющих номера $i_1 < i_2 < \ldots < i_d$. Тогда на чашке, на которой лежит самая тяжёлая монета, суммарная масса не меньше $k2^{100} + 2^{i_d}$, а суммарная масса на другой чашке не больше $k2^{100} + (2^1 + \ldots + 2^{i_d - 1}) = k2^{100} + 2^{i_d} - 1$. Значит, если на чашках есть хотя бы одна фальшивая монета, то перевесит чашка, на которой лежит фальшивая с наибольшим номером.

Итак, пусть нумизмат действует по своему алгоритму. Мы будем сообщать ему результаты взвешиваний и присваивать некоторым монетам массы m_i. При этом после каждого взвешивания присвоенными окажутся веса $m_{70}, m_{69}, \ldots, m_{70-i}$ при некотором i. Далее, если соответствующие монеты действительно имеют такие массы (а остальные массы распределены как угодно), то результаты взвешиваний будут такими, как мы сообщили.

При первом взвешивании выберем любую монету на чашках, присвоим ей массу m_{70} и сообщим, что чашка с ней тяжелее. При каждом следующем взвешивании, если на весах уже присутствует монета с присвоенной массой, то мы просто выберем из таких масс наибольшую и сообщим, что чашка с соответствующей монетой перевесила. Если же никакой монете на весах масса ещё не присвоена, то мы опять выберем любую монету на чашках, присвоим ей наибольшую ещё не присвоенную массу и сообщим, что чашка с ней тяжелее. Нетрудно видеть, что при этом требуемые условия соблюдаются.

Если нумизмат совершил не более 69 взвешиваний, то не более 69 масс окажутся присвоенными. В частности, m_1 присвоенной не будет. Значит, массу m_1 может иметь любая монета, которой масса ещё не присвоена, и при этом все результаты взвешиваний останутся такими, как мы сообщили. Поэтому нумизмат не сможет указать на заведомо настоящую монету.

Замечание. Ответ в задаче не изменится, если убрать условие равенства количеств монет на чашках.

11 класс

11.5. Бессмертная блоха прыгает по целым точкам на числовой прямой, стартуя с точки 0. Длина первого прыжка равна 3, второго — 5, третьего — 9, и так далее (длина k-го прыжка равна $2^k + 1$). Направление прыжка (вправо или влево) блоха выбирает самостоятельно. Может ли так случиться, что блоха рано или поздно побывает в любой натуральной точке (возможно, побывав в некоторых точках больше, чем по разу)? (*С. Берлов*)

Ответ. Да.

Решение. Покажем, как блоха может прыгать, попадая последовательно в точки 0, 1, 2, 3, ... (каждый раз — за несколько прыжков). Для этого достаточно показать, как, попав в точку n, за несколько прыжков попасть в точку $n + 1$.

Пусть до попадания в точку n блоха совершила $k - 1$ прыжков (т. е. длина следующего прыжок будет равна $2^k + 1$). Тогда она может сделать $\ell = 2^k$ прыжков влево, а затем один прыжок вправо. В результате она сместится вправо на

$$(2^{k+\ell} + 1) - (2^k + 1) - (2^{k+1} + 1) - \ldots - (2^{k+\ell-1} + 1) =$$
$$= (2^{k+\ell} - 2^k - 2^{k+1} - \ldots - 2^{k+\ell-1}) + 1 - 2^k = 2^k + 1 - 2^k = 1,$$

что и требовалось.

11.6. Действительные числа a, b, c, d, по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

(*К. Иванов*)

Решение. Обозначим $x = \frac{a+1}{a-1}$, $y = \frac{b+1}{b-1}$, $z = \frac{c+1}{c-1}$, $t = \frac{d+1}{d-1}$. Поскольку модули чисел a, b, c, d больше единицы, числа x, y, z, t положительны (и не равны 1).

Данное соотношение переписывается в виде

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1),$$

или $xyzt = 1$. Из равенства $\frac{1}{a-1} = \frac{x-1}{2}$ и аналогичных получаем, что

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1}=\frac{x+y+z+t-4}{2}.$$

Таким образом, нам надо доказать, что $x+y+z+t>4$.

Поскольку $xyzt=1$, но числа x, y, z, t отличны от единицы, среди них есть различные. Тогда по неравенству о средних получаем

$$x+y+z+t>4\sqrt[4]{xyzt}=4,$$

что и требовалось.

11.7. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω. (*М. Кунгожин*)

Первое решение. Пусть, без ограничения общности, точка D лежит на луче BA. Пусть биссектрисы AI и BI углов треугольника пересекают ω вторично в точках A' и B' соответственно. Пусть, наконец, L — середина дуги ACB (см. рис. 4).

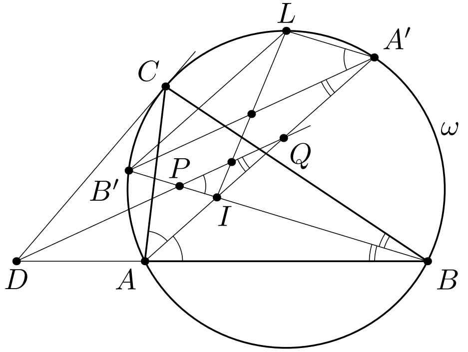

Рис. 4

Заметим, что $\angle LA'A=\angle LBA=(\angle A+\angle B)/2=\angle B'IA$. Значит, $LA'\parallel IB'$ и, аналогично, $LB'\parallel IA'$. Поэтому $IA'LB'$ — параллелограмм, и прямая LI делит $A'B'$ пополам.

Далее, $\angle CDB=\angle CAB-\angle ACD=\angle A-\angle B$. Значит, $\angle PQA=\angle QAB-\angle QDB=\angle A/2-(\angle A-\angle B)/2=\angle B/2=$ $=\angle B'A'A$, так что $PQ\parallel A'B'$. Но тогда прямая LI, делящая отрезок $A'B'$ пополам, делит пополам и отрезок PQ, что и требовалось доказать.

Второе решение. Как и в предыдущем решении, обозначим через L середину дуги ACB и покажем, что $\angle PQA = \angle B/2 = \angle PBA$. Это значит, что точки Q, P, A и B лежат на одной окружности. А значит, прямые PQ и AB антипараллельны друг другу относительно прямых PI и QI. Поэтому, чтобы доказать, что LI — медиана треугольника PIQ, достаточно доказать, что LI — симедиана треугольника AIB.

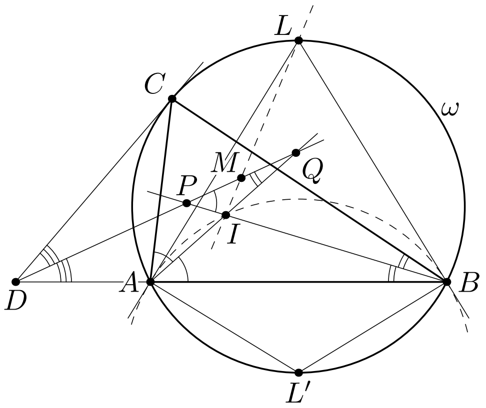

Рис. 5

Пусть L' — точка окружности ω, диаметрально противоположная точке L. Тогда по лемме о трезубце L' — центр окружности, описанной около треугольника AIB. При этом $\angle L'AL = \angle L'BL = 90°$. Значит, LA и LB — касательные к окружности, описанной около треугольника AIB. Значит, по теореме о симедиане LI — симедиана треугольника ABI.

11.8. Даны натуральные числа a и b, причём $a < b < 2a$. На клетчатой плоскости отмечены некоторые клетки так, что в каждом клетчатом прямоугольнике $a \times b$ или $b \times a$ есть хотя бы одна отмеченная клетка. При каком наибольшем α можно утверждать, что для любого натурального N найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, в котором отмечено хотя бы αN^2 клеток?

(*И. Богданов, О. Подлипский*)

Ответ. $\alpha = 1/(2a^2 - 2ab + b^2)$.

Решение. Введём на плоскости систему координат так, чтобы центры клеток, и только они, имели целые координаты. Будем говорить, что клетка имеет те же координаты, что и её центр. Назовём прямоугольник $a \times b$ *вертикальным* или *горизонтальным*, если его сторона длины b вертикальна или горизонтальна, соответственно.

1. Положим $D = a^2 + (b-a)^2 = 2a^2 - 2ab + b^2$. Отметим на плоскости клетку $(0,0)$ и все клетки, полученные из неё сдвигами на целые кратные векторов $(a, b-a)$ и $(b-a, -a)$; на рис. 6 приведён пример такой разметки при $a = 3$, $b = 5$. Центры этих клеток находятся в вершинах квадратной сетки со стороной $\sqrt{D}$; при этом клетки $(D,0) = (a^2+(b-a)^2, (b-a)a-a(b-a))$ и $(0,D)$ отмечены. Значит, при горизонтальном или вертикальном сдвиге на D отмеченная клетка переходит в отмеченную. Отсюда нетрудно получить, что в любом квадрате $D \times D$ ровно D отмеченных клеток.

Покажем, что такая разметка удовлетворяет условию; отсюда будет следовать, что $\alpha \leqslant D/D^2 = 1/D$. Действительно, рассмотрим любую полосу из b последовательных горизонталей. Ясно, что в ней есть хотя бы одна отмеченная клетка. Далее, если (x,y) — координаты любой отмеченной клетки в ней, то одна из двух клеток $(x+a, y+(b-a))$ или $(x+(b-a), y-a)$ также находится в этой полосе, и смещена относительно предыдущей не более, чем на a вправо. Значит, в любых a вертикалях нашей полосы найдётся отмеченная клетка. Доказательство для горизонтальных прямоугольников аналогично.

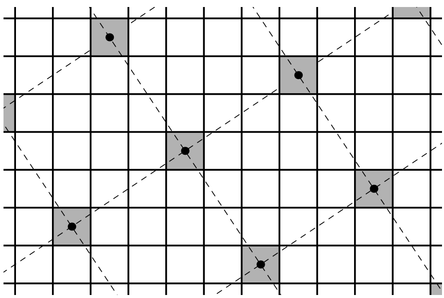

Рис. 6

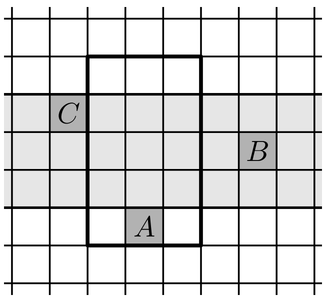

Рис. 7

2. Осталось показать, что $\alpha = 1/D$ подходит. Рассмотрим произвольную разметку, удовлетворяющую условию. Каж-

дому вертикальному прямоугольнику сопоставим любую из самых верхних отмеченных в нём клеток. Оценим, какому количеству прямоугольников может быть сопоставлена одна отмеченная клетка A; пусть её координаты $(0,0)$. Её содержат ab вертикальных прямоугольников.

Рассмотрим горизонтальную полосу из клеток, ординаты которых не меньше 1 и не больше a. Пусть B — отмеченная клетка в этой полосе с наименьшей неотрицательной абсциссой, а C — отмеченная клетка в этой полосе с наибольшей отрицательной абсциссой. Тогда между B и C расположено не более $b-1$ вертикалей, в противном случае в нашей полосе между этими клетками нашёлся бы горизонтальный прямоугольник без отмеченных клеток.

Рассмотрим теперь все $a\cdot(b-a)$ вертикальных прямоугольников, содержащих A и пересекающих хотя бы a горизонталей сверху от A. Каждый из них содержит B или C, за исключением тех, которые расположены строго между B и C; таковых по доказанному выше не более $(b-a)\cdot(b-a)$. Значит, хотя бы $a(b-a)-(b-a)^2=(2a-b)(b-a)$ прямоугольников, содержащих A, содержат также B или C, и A им не сопоставлена. Итого, клетка A сопоставлена не более, чем $ab-(2a-b)(b-a)=D$ вертикальным прямоугольникам.

Пусть теперь N — произвольное число. Положим $K = (a+b)N^2$ и рассмотрим произвольный квадрат $K\times K$; пусть в нём s отмеченных клеток. В этом квадрате расположено не меньше $(K-a)(K-b)$ вертикальных прямоугольников; каждому из них сопоставлена одна из s отмеченных клеток. По доказанному, получаем

$$s\geqslant\frac{(K-a)(K-b)}{D}>\frac{K(K-a-b)}{D}=\frac{(a+b)^2N^2(N^2-1)}{D}.$$

Разделив наш квадрат $K\times K$ на $(a+b)^2N^2$ квадратов размера $N\times N$, получаем, что в одном из них больше, чем $\frac{N^2-1}{D}$ отмеченных клеток; значит, их не меньше, чем $\frac{N^2-1}{D}+\frac{1}{D}=\frac{N^2}{D}$, что и требовалось доказать.