Материалы для проведения регионального этапа

XLII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2015–2016 учебный год

Второй день

5–6 февраля 2016 г.

Москва, 2015

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, И. И. Богданов, И. А. Бочков, А. А. Гаврилюк, Н. А. Гладков, А. И. Голованов, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Г. К. Жуков, А. П. Зимин, Г. М. Иванов, П. А. Кожевников, К. А. Кноп, А. С. Кузнецов, В. Б. Мокин, В. А. Омельяненко, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Н. В. Чернега, К. В. Чувилин.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Эксперт: к. ф.-м. н. С. П. Коновалов.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015–2016 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015–2016 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **05 февраля 2016 г.** (I тур) и **06 февраля 2016 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 8 задач — по 4 задачи в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–4 — I тур, задачи 5–8 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2015–2016 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, апелляции и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2015–2016 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились любые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.)

(*И. Богданов*)

Ответ. Да, могло.

Первое решение. Предъявим пример, как такое могло произойти. Выстроим учеников по кругу. Предположим, что к каждому на день рождения пришли все одноклассники, кроме следующего за ним по часовой стрелке. Тогда любые два ученика A и B встретились на всех празднованиях, кроме двух: того, на которое не пришёл A, и того, на которое не пришёл B. Значит, любая пара учеников встретилась 21 раз.

Второе решение. Предъявим другой возможный пример. Выделим из класса двух учеников A и B. Пусть на день рождения к A пришли все одноклассники, кроме B, на день рождения к B пришёл только A, а на остальные дни рождения приходил только B. Тогда любая пара, в которой нет B, встретилась только на дне рождения A, а все пары, содержащие B, встречались ровно по разу на остальных празднованиях. Итого, каждая пара встретилась ровно по разу.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён правильный пример, возможно, без обоснования или с неверным обоснованием — не менее 5 баллов.

9.6. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит

в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Множество всех натуральных чисел, а также множества $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ и $\{1,2,3,4\}$.

Решение. Для начала проверим, что множества $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,3,4\}$, а также множество всех натуральных чисел — полные. Для последнего множества это очевидно; для первых четырёх заметим, что если натуральные числа a и b таковы, что $a+b \leqslant 4$, то либо они оба равны 2, либо одно из них равно 1; в любом из этих случаев имеем $ab \leqslant a+b$. Значит. если $a+b \in A$, то и $ab \in A$.

Пусть теперь A — произвольное полное множество. Если A содержит некоторое число $k \geqslant 2$, то по условию оно также содержит число $1 \cdot (k-1) = k-1$. Продолжая этот процесс, получаем, что все натуральные числа, не превосходящие k, лежат в A. В частности, если A не содержит чисел, больших 4, то множество A уже перечислено в ответе.

Пусть теперь в A есть число $\ell \geqslant 5$. Зададим последовательность $\ell_1, \ell_2, \ldots$ соотношениями $\ell_1 = \ell$, $\ell_{n+1} = 2(\ell_n - 2)$. Все эти числа лежат в A. Действительно, ℓ_1 лежит в A по нашему предположению, а если $\ell_n = 2+(\ell_n-2) \in A$, то и $\ell_{n+1} = 2(\ell_n-2) \in A$. Кроме того, $\ell_{n+1} = \ell_n + (\ell_n - 4)$; по индукции теперь получаем, что $\ell_{n+1} > \ell_n \geqslant 5$. Значит, для любого натурального n имеем $\ell_n > n$; из рассуждений предыдущего абзаца понимаем теперь, что и $n \in A$. Итак, все натуральные числа лежат в A.

Комментарий. Верный ответ — 1 балл.

Доказано, что вместе с любым числом полное множество содержит все меньшие его — 2 балла.

Доказано, что полное множество, в котором есть число, большее 4, содержит бесконечно много чисел — 2 балла.

В решении упущен один или несколько из ответов — не более 5 баллов.

9.7. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k *удачным*, если $k \leqslant 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k, расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными? *(Е. Бакаев)*

Ответ. 1008 чисел.

Решение. Рассмотрим произвольное окрашивание таблицы. Пусть нашлось хотя бы два удачных числа, и a — наименьшее из них, а b — наибольшее.

Поделим b на a с остатком: $b = qa+r$, где $0 \leqslant r < a$. Предположим, что $q \geqslant 2$. В произвольном квадрате $b\times b$ можно расположить q^2 непересекающихся квадратов $a\times a$. В этих квадратах будет ровно $q^2 a$ чёрных клеток. Однако $q^2 a > (q+1)a > qa+r = b$; значит, в квадрате $b \times b$ будет больше, чем b чёрных клеток, что невозможно. Итак, $q < 2$, то есть $b < 2a$.

Общее количество удачных чисел не превосходит количества натуральных чисел от a до b, то есть оно не больше $b - a + 1 < b - b/2 + 1 = b/2 + 1 \leqslant 1009$. Значит, это количество не больше 1008.

Осталось привести пример раскраски, для которой найдутся 1008 удачных чисел. Окрасим чёрным все клетки 1008-й строки и только их. Рассмотрим произвольный квадрат со стороной $d \geqslant 1009$. Он пересекается с 1008-ой строкой, значит в нём есть целая строка отмеченных клеток, то есть их как раз d штук. Значит, все числа от 1009 до 2016 являются удачными, и таких чисел как раз 1008.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример с 1008 удачными числами — 2 балла.

Доказано только, что удачных чисел не больше 1008 — 4 балла.

9.8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90^\circ$. Пусть M — середина стороны BC. Оказалось. что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$. *(Е. Бакаев)*

Первое решение. На продолжении отрезка AB за точку A отметим точку K так, что $AB = AK$ (см. рис. 1). Тогда AM — средняя линия в треугольнике BCK, откуда $AM \parallel CK$. Значит, $\angle BKC = \angle BAM = \angle ADC$. Отсюда следует, что четырёхугольник $AKDC$ вписан.

Опять же используя параллельность AM и CK, получаем $\angle CAM = \angle ACK = \angle ADK$. Наконец, DA — медиана и высо-

та в треугольнике BDK, поэтому DA является и биссектрисой; отсюда $\angle ADB = \angle ADK = \angle CAM$, что и требовалось доказать.

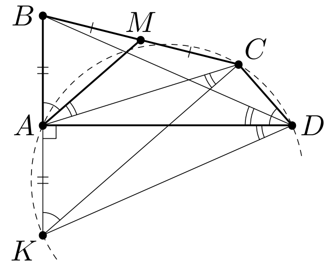

Рис. 1

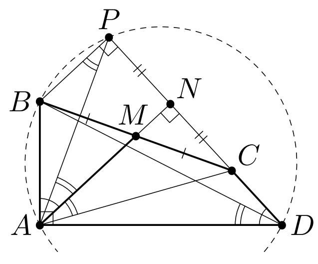

Рис. 2

Второе решение. Заметим, что $\angle ADC + \angle DAM = \angle BAM + \angle DAM = 90^\circ$; это значит, что $AM \perp CD$. Опустим перпендикуляры MN и BP из точек M и B на прямую CD; тогда точки A, M и N лежат на одной прямой (см. рис. 2).

Поскольку $BM = MC$, по теореме Фалеса получаем $PN = NC$. Значит, AN — высота и медиана в треугольнике APC, откуда $\angle CAM = \angle MAP$. Так как $BP \parallel AN$, получаем $\angle MAP = \angle APB$. Наконец, поскольку $\angle BPD = \angle BAD = 90^\circ$, четырёхугольник $ABPD$ вписан; поэтому $\angle APB = \angle ADB$. Итак, мы получили, что $\angle CAM = \angle MAP = \angle APB = \angle ADB$, что и требовалось.

Третье решение. Отложим на луче AM точку Q так, что $AQ = 2AM$ (см. рис. 3). Тогда в четырёхугольнике $ABQC$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, то есть он — параллелограмм; значит, $\angle CAQ = \angle AQB$.

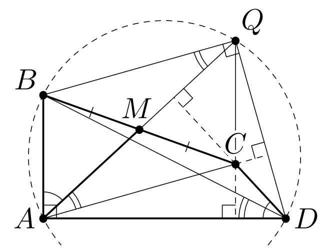

Рис. 3

Так как $QC \parallel AB$, получаем $QC \perp AD$. Так как $\angle QAD = 90^\circ - \angle BAQ = 90^\circ - \angle ADC$, имеем $DC \perp AQ$. Значит, C — точка пересечения высот в треугольнике AQD, откуда $AC \perp QD$ (и, значит, $BQ \perp QD$).

Поскольку $\angle BAD = \angle BQD = 90^\circ$, четырёхугольник $ABQD$ вписан. Значит, $\angle ADB = \angle AQB = \angle CAQ$, что и требовалось доказать.

10 класс

10.5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из действительных чисел, *полным*, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Такое множество одно: это множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Первое решение. Пусть A — полное множество. Поскольку оно непусто, то можно выбрать элемент $a \in A$. Тогда $a + 0 = a \in A$, значит, $a \cdot 0 = 0 \in A$. Так как $(-x) + x = 0 \in A$, получаем теперь, что $(-x) \cdot x = -x^2 \in A$ при всех действительных x. В силу произвольности выбора x отсюда следует, что любое отрицательное число также принадлежит множеству A.

Наконец, для любого $b > 0$ из того, что число $(-b) + (-b) = -2b$ лежит в A, получаем, что $b^2 = (-b) \cdot (-b) \in A$. Значит, и произвольное положительное число также лежит в A. Итак, в A входят все действительные числа.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем произвольный элемент $s \in A$. Докажем, что любое $t \leqslant 0$ лежит в A. Рассмотрим уравнение $x^2 - sx + t = 0$; его дискриминант неотрицателен, так что оно имеет два (возможно, совпадающих) корня a и b. Тогда по теореме Виета имеем $a + b = t$ и $ab = s$. Поскольку $a + b = s \in A$, получаем, что и $t \in A$.

Осталось показать, что любое $u > 0$ также лежит в A. По доказанному выше, $(-u) + (-1) \in A$; значит, и $(-u) \cdot (-1) = u$ также лежит в A.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что полное множество содержит все отрицательные (или все неположительные) числа — 3 балла.

10.6. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I, касающаяся отрезков AB, CD и DA. Окружность, описанная около треугольника BIC, вторично пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что прямая CE касается окружности ω. (*Б. Обухов*)

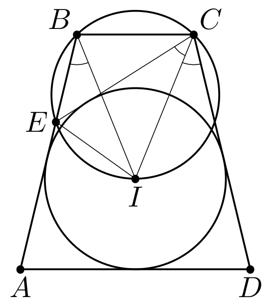

Рис. 4

Решение. Заметим, что I лежит на оси симметрии трапеции, поэтому $\angle ICD = \angle IBA$. Пользуясь вписанностью четырехугольника $CBEI$, получаем $\angle ICD = \angle IBA = \angle IBE = \angle ICE$. Так как прямая CD касается окружности ω, то и прямая CE, симметричная ей относительно CI, также касается ω.

Замечание. Есть и другие решения, например, с использованием равенств $\angle IEA = \angle ICB = \angle IBC = \angle IEC$.

Комментарий. Показано, что точка I лежит на оси симметрии трапеции, или эквивалентные продвижения — 0 баллов.

10.7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах. (*Н. Власова*)

Решение. Заметим сразу, что на *любой* дуге между членами хорошей пары поровну девочек и мальчиков.

Пусть D — девочка, участвующая в 10 хороших парах. Обозначим всех детей по часовой стрелке $K_1, K_2, \ldots, K_{2n}$ так, что K_1 — это D, и продолжим нумерацию циклически (например, $K_0 = K_{2n}$ и $K_{2n+1} = K_1$). При $i = 1, 2, \ldots, 2n$ обозначим через d_i разность между количествами девочек и мальчиков среди $K_1, K_2, \ldots, K_i$; в частности, $d_1 = 1-0 = 1$ и $d_{2n} = 0$ (поэтому можно продолжить эту последовательность, полагая $d_{2n+1} = d_1$ и т. д.). Девочка D образует с K_i хорошую пару тогда и только тогда, когда $d_i = 0$ и K_i — мальчик, т. е. $d_i = 0$ и $d_{i-1} = 1$. Итак, найдутся ровно 10 индексов i с такими свойствами.

Рассмотрим любого мальчика $M = K_s$, образующего с D хорошую пару; тогда $d_s = 0$ и $d_{s-1} = 1$. Аналогично получаем, мальчик M образует хорошую пару с K_i ровно тогда, когда $d_s = d_{i-1}$ и K_i — девочка (то есть $d_{i-1} = 0$ и $d_i = 1$).

Заметим, что любые два числа d_i и d_{i+1} отличаются на единицу. Разобьём их на группы последовательных чисел, не меньших единицы, и группы последовательных чисел, не бо́льших нуля. Тогда при обходе круга по часовой стрелке «переходов» из первых групп во вторые будет столько же, сколько и «переходов» из вторых групп в первые. Значит, у M столько же хороших напарниц, сколько у D хороших напарников. Это и требовалось доказать.

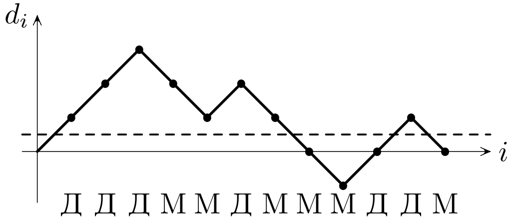

Рис. 5

Замечание 1. Это решение можно визуализировать, нарисовав «график» последовательности (d_i) (см. рис. 5). Тогда появление хорошего напарника у D означает, что график пересекает прямую $d = 1/2$ сверху вниз, а появление хорошей напарницы у M — пересечение той же прямой снизу вверх.

Замечание 2. Из решения следует, что, если девочка образует хорошую пару с двумя мальчиками, то любая девочка, образующая хорошую пару с одним из этих мальчиков, образует её и с другим. Более того, все дети разбиваются на непересекающиеся группы (в каждой группе поровну мальчиков и девочек) так, что каждый мальчик образует хорошие пары со всеми девочками из своей группы и только с ними, и то же верно для любой девочки. При этом, при обходе по кругу мальчики и девочки из одной группы чередуются.

Существуют решения, доказывающие этот факт напрямую (например, индукцией по числу детей).

10.8. Найдите все пары различных действительных чисел x и y такие, что $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$ и $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$.

(И. Богданов)

Ответ. $(x, y) = (2, 0)$ и $(x, y) = (0, 2)$.

Решение. Для удобства сделаем замену $x = 2a$ и $y = 2b$. Тогда из условия имеем $(2a)^{100} - (2b)^{100} = 2^{99} \cdot (2a - 2b)$ и

$(2a)^{200} - (2b)^{200} = 2^{199} \cdot (2a - 2b)$. Сократив оба равенства на степени двойки, получаем $a^{100} - b^{100} = a^{200} - b^{200} = a - b \neq 0$. Поделив второе выражение на первое, получаем $a^{100} + b^{100} = 1$; значит, каждое из чисел a и b по модулю не превосходит 1.

Если $b = 0$, то $a^{100} = a$, откуда $a = 1$. Аналогично, если $a = 0$, то $b = 1$; это приводит к двум ответам $(x, y) = (2, 0)$ и $(x, y) = (0, 2)$.

Пусть теперь $ab \neq 0$; тогда $|a|, |b| < 1$. Заметим, что значения функции $f(x) = x^{100} - x = x(x^{99} - 1)$ положительны при $x \in (-1, 0)$ и отрицательны при $x \in (0, 1)$. Поскольку $a^{100} - b^{100} = a - b$, имеем $f(a) = f(b)$, поэтому числа a и b имеют одинаковый знак.

С другой стороны,

$$1 = \frac{a^{100} - b^{100}}{a - b} = a^{99} + a^{98}b + a^{97}b^2 + \ldots + b^{99}. \qquad (*)$$

Если a и b отрицательны, то правая часть в $(*)$ также отрицательна, что невозможно. Если же a и b положительны, то все слагаемые в правой части $(*)$ положительны, поэтому она больше, чем $a^{99} + b^{99}$; итак, $a^{99} + b^{99} < 1$. С другой стороны, поскольку $0 < |a|, |b| < 1$, имеем $a^{99} + b^{99} > a^{100} + b^{100} = 1$. Противоречие.

Замечание. После получения неравенства $(*)$ решение можно завершить разными способами — например, с использованием неравенства

$$(a^{99} + a^{98}b + a^{97}b^2 + \ldots + b^{99})^{100} > (a^{100} + b^{100})^{99},$$

справедливого при $ab > 0$. Это неравенство можно доказать, раскрыв скобки и установив, что коэффициент при любом одночлене слева не меньше, чем коэффициент при таком же одночлене справа.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Переход от чисел x и y к числам $a = x/2$ и $b = y/2$ — 0 баллов.

Доказано, что ненулевые числа x и y не могут иметь разные знаки — 3 балла.

Доказано, что ненулевые числа x и y не могут иметь один знак — 3 балла.

11 класс

11.5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из действительных чисел, *полным*, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Такое множество одно: это множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Первое решение. Пусть A — полное множество. Поскольку оно непусто, то можно выбрать элемент $a \in A$. Тогда $a + 0 = a \in A$, значит, $a \cdot 0 = 0 \in A$. Так как $(-x) + x = 0 \in A$, получаем теперь, что $(-x) \cdot x = -x^2 \in A$ при всех действительных x. В силу произвольности выбора x отсюда следует, что любое отрицательное число также принадлежит множеству A.

Наконец, для любого $b > 0$ из того, что число $(-b) + (-b) = -2b$ лежит в A, получаем, что $b^2 = (-b) \cdot (-b) \in A$. Значит, и произвольное положительное число также лежит в A. Итак, в A входят все действительные числа.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем произвольный элемент $s \in A$. Докажем, что любое $t \leqslant 0$ лежит в A. Рассмотрим уравнение $x^2 - sx + t = 0$; его дискриминант неотрицателен, так что оно имеет два (возможно, совпадающих) корня a и b. Тогда по теореме Виета имеем $a + b = t$ и $ab = s$. Поскольку $a + b = s \in A$, получаем, что и $t \in A$.

Осталось показать, что любое $u > 0$ также лежит в A. По доказанному выше, $(-u) + (-1) \in A$; значит, и $(-u) \cdot (-1) = u$ также лежит в A.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что полное множество содержит все отрицательные (или все неположительные) числа — 3 балла.

11.6. В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер — красного цвета, а остальные — зеленого. Каждую точку касания красной и зеленой сферы покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек.

(*А. Кузнецов*)

Ответ. $1008^2 = 1\,016\,064$ точек.

Решение. Пусть среди сфер есть r красных и $2016-r$ зелёных. Так как у любых двух сфер максимум одна точка касания, количество синих точек не превосходит $r(2016 - r) = 1008^2 - (1008 - r)^2 \leqslant 1008^2$.

Предъявим пример с таким количеством синих точек. Пусть ℓ — некоторая прямая, α — плоскость, перпендикулярная ℓ и пересекающая её в точке O, а ω — окружность с центром O и радиусом 1, лежащая в α. Построим 1008 красных сфер одинакового радиуса $r < 1$ с различными центрами $R_1, R_2, \ldots, R_{1008}$, лежащими на ω.

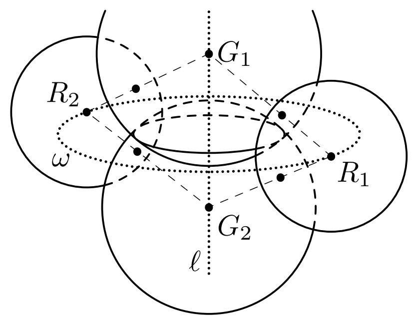

Рис. 6

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_{1008}$ — различные точки на ℓ, удалённые от O на расстояния $d_1, d_2, \ldots, d_{1008}$. Тогда расстояние между G_i и любой точкой R_j равно $\sqrt{1 + d_i^2}$. Значит, если мы построим зелёную сферу с центром G_i и радиусом $\sqrt{1 + d_i^2} - r$, она будет касаться всех синих сфер. При этом все точки касания будут попарно различными, поскольку они лежат на отрезках вида R_jG_i, которые не имеют общих точек, кроме концов. Значит, в нашей конструкции действительно будут отмечены 1008^2 синих точек.

Замечание. Все красные сферы в этом примере получаются друг из друга вращением вокруг прямой ℓ. Поэтому, если зелёная сфера, центр которой лежит на ℓ, касается одной красной сферы, то она касается и всех красных сфер.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только доказательство того, что синих точек не больше, чем $1008^2 - 1$ балл.

Верный пример без доказательства оптимальности — 5 баллов.

11.7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах. (*Н. Власова*)

Решение. Заметим сразу, что на *любой* дуге между членами хорошей пары поровну девочек и мальчиков.

Пусть D — девочка, участвующая в 10 хороших парах. Обозначим всех детей по часовой стрелке $K_1, K_2, \ldots, K_{2n}$ так, что K_1 — это D, и продолжим нумерацию циклически (например, $K_0 = K_{2n}$ и $K_{2n+1} = K_1$). При $i = 1, 2, \ldots, 2n$ обозначим через d_i разность между количествами девочек и мальчиков среди $K_1, K_2, \ldots, K_i$; в частности, $d_1 = 1 - 0 = 1$ и $d_{2n} = 0$ (поэтому можно продолжить эту последовательность, полагая $d_{2n+1} = d_1$ и т. д.). Девочка D образует с K_i хорошую пару тогда и только тогда, когда $d_i = 0$ и K_i — мальчик, т. е. $d_i = 0$ и $d_{i-1} = 1$. Итак, найдутся ровно 10 индексов i с такими свойствами.

Рассмотрим любого мальчика $M = K_s$, образующего с D хорошую пару; тогда $d_s = 0$ и $d_{s-1} = 1$. Аналогично получаем, мальчик M образует хорошую пару с K_i ровно тогда, когда $d_s = d_{i-1}$ и K_i — девочка (то есть $d_{i-1} = 0$ и $d_i = 1$).

Заметим, что любые два числа d_i и d_{i+1} отличаются на единицу. Разобьём их на группы последовательных чисел, не меньших единицы, и группы последовательных чисел, не бо́льших нуля. Тогда при обходе круга по часовой стрелке «переходов» из первых групп во вторые будет столько же, сколько и «переходов» из вторых групп в первые. Значит, у M столько же хороших напарниц, сколько у D хороших напарников. Это и требовалось доказать.

Замечание 1. Это решение можно визуализировать, нарисовав «график» последовательности (d_i) (см. рис. 7). Тогда

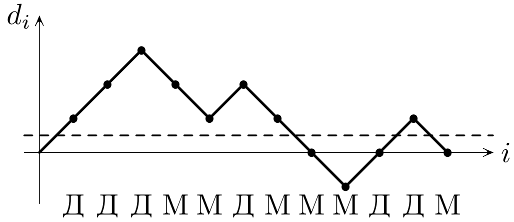

Рис. 7

появление хорошего напарника у D означает, что график пересекает прямую $d = 1/2$ сверху вниз, а появление хорошей напарницы у M — пересечение той же прямой снизу вверх.

Замечание 2. Из решения следует, что, если девочка образует хорошую пару с двумя мальчиками, то любая девочка, образующая хорошую пару с одним из этих мальчиков, образует её и с другим. Более того, все дети разбиваются на непересекающиеся группы (в каждой группе поровну мальчиков и девочек) так, что каждый мальчик образует хорошие пары со всеми девочками из своей группы и только с ними, и то же верно для любой девочки. При этом, при обходе по кругу мальчики и девочки из одной группы чередуются.

Существуют решения, доказывающие этот факт напрямую (например, индукцией по числу детей).

11.8. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных? (*А. С. Голованов*)

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Приведём пример числа N, для которого все указанные числа будут различными. Положим

$$N = (3^2 - 2^2)^{105}(3^3 - 2^3)^{70}(3^5 - 2^5)^{126}(3^7 - 2^7)^{120}.$$

Тогда

$$N = M_2^2(3^2 - 2^2) = M_3^3(3^3 - 2^3) = M_5^5(3^5 - 2^5) = M_7^7(3^7 - 2^7)$$

при некоторых натуральных M_2, M_3, M_5 и M_7, не делящихся ни на 2, ни на 3. Отсюда

$N = (3M_2)^2 - (2M_2)^2 = (3M_3)^3 - (2M_3)^3 =$

$$= (3M_5)^5 - (2M_5)^5 = (3M_7)^7 - (2M_7)^7.$$

Даже все восемь чисел, участвующих в представлениях, различны, поскольку у любых двух из них разная степень вхождения либо двойки, либо тройки.

Замечание. Подобный пример можно построить из следующих соображений (все упоминающиеся числа — натуральные). Рассмотрим какие-нибудь числа вида $K_2 = x_1^2 - x_2^2$, $K_3 = y_1^3 - y_2^3$, $K_5 = z_1^5 - z_2^5$ и $K_7 = t_1^7 - t_2^7$. Чтобы, скажем, получить число, представимое в виде разности как третьих, так и пятых степеней, достаточно взять число, имеющее вид K_3A^3 и одновременно K_5B^5. Значит, подойдёт число вида $K_3^\alpha K_5^\beta$, где α делится на 5 и даёт остаток 1 при делении на 3, а β делится на 3 и даёт остаток 1 при делении на 5.

Аналогично, чтобы получить число, требуемое в задаче, достаточно взять число $K_2^{\alpha_2} K_3^{\alpha_3} K_5^{\alpha_5} K_7^{\alpha_7}$, где α_2 даёт остаток 1 при делении на 2 и делится на $3 \cdot 5 \cdot 7$, а остальные показатели обладают аналогичными свойствами. Доказать существование таких показателей можно разными способами — в частности, неконструктивно, с использованием китайской теоремы об остатках. После этого нужно ещё проверить, что полученные степени различны.

Комментарий. Приведён (возможно, неконструктивно) пример требуемого числа, но не обосновано, что все полученные степени различны — не менее 4 баллов.

Содержание