

**9 класс****Второй день**

- 9.5. На доске написаны  $n > 3$  различных натуральных чисел, меньших, чем  $(n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1)$ . Для каждой пары этих чисел Серёжа поделил большее на меньшее с остатком и записал в тетрадку полученное неполное частное (так, если бы он делил 100 на 7, то он бы получил  $100 = 14 \cdot 7 + 2$  и записал бы в тетрадку число 14). Докажите, что среди чисел в тетрадке найдутся два равных.
- 9.6. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения  $a^3$ ,  $b^3$  и  $c^3$ ?
- 9.7. Неравнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle ACB = 60^\circ$ , вписан в окружность  $\Omega$ . На биссектрисе угла  $BAC$  выбрана точка  $A'$ , а на биссектрисе угла  $ABC$  — точка  $B'$  так, что  $AB' \parallel BC$  и  $BA' \parallel AC$ . Прямая  $A'B'$  пересекает  $\Omega$  в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что треугольник  $CDE$  равнобедренный.
- 9.8. Каждая клетка доски  $100 \times 100$  окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата  $2 \times 2$ . Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат  $2 \times 2$ , клетки которого окрашены в шахматном порядке.

**9 класс****Второй день**

- 9.5. На доске написаны  $n > 3$  различных натуральных чисел, меньших, чем  $(n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1)$ . Для каждой пары этих чисел Серёжа поделил большее на меньшее с остатком и записал в тетрадку полученное неполное частное (так, если бы он делил 100 на 7, то он бы получил  $100 = 14 \cdot 7 + 2$  и записал бы в тетрадку число 14). Докажите, что среди чисел в тетрадке найдутся два равных.
- 9.6. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения  $a^3$ ,  $b^3$  и  $c^3$ ?
- 9.7. Неравнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle ACB = 60^\circ$ , вписан в окружность  $\Omega$ . На биссектрисе угла  $BAC$  выбрана точка  $A'$ , а на биссектрисе угла  $ABC$  — точка  $B'$  так, что  $AB' \parallel BC$  и  $BA' \parallel AC$ . Прямая  $A'B'$  пересекает  $\Omega$  в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что треугольник  $CDE$  равнобедренный.
- 9.8. Каждая клетка доски  $100 \times 100$  окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата  $2 \times 2$ . Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат  $2 \times 2$ , клетки которого окрашены в шахматном порядке.

**10 класс****Второй день**

- 10.5. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа  $n$ , увеличенные на 1. Найдите все такие числа  $n$ , для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа  $m$ . (*Собственными делителями* натурального числа  $a > 1$  называются все его натуральные делители, отличные от  $a$  и от 1.)
- 10.6. Пусть  $P(x)$  — многочлен степени  $n \geq 2$  с неотрицательными коэффициентами, а  $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа  $\sqrt[n]{P(a)}$ ,  $\sqrt[n]{P(b)}$  и  $\sqrt[n]{P(c)}$  также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.
- 10.7. Каждая клетка доски  $100 \times 100$  окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата  $2 \times 2$ . Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат  $2 \times 2$ , клетки которого окрашены в шахматном порядке.
- 10.8. Неравнобедренный треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$  и описан около окружности с центром  $I$ . Точка  $B'$ , симметричная точке  $B$  относительно прямой  $OI$ , лежит внутри угла  $ABI$ . Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника  $BB'I$ , проведенные в точках  $B'$  и  $I$ , пересекаются на прямой  $AC$ .

**10 класс****Второй день**

- 10.5. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа  $n$ , увеличенные на 1. Найдите все такие числа  $n$ , для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа  $m$ . (*Собственными делителями* натурального числа  $a > 1$  называются все его натуральные делители, отличные от  $a$  и от 1.)
- 10.6. Пусть  $P(x)$  — многочлен степени  $n \geq 2$  с неотрицательными коэффициентами, а  $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа  $\sqrt[n]{P(a)}$ ,  $\sqrt[n]{P(b)}$  и  $\sqrt[n]{P(c)}$  также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.
- 10.7. Каждая клетка доски  $100 \times 100$  окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата  $2 \times 2$ . Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат  $2 \times 2$ , клетки которого окрашены в шахматном порядке.
- 10.8. Неравнобедренный треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$  и описан около окружности с центром  $I$ . Точка  $B'$ , симметричная точке  $B$  относительно прямой  $OI$ , лежит внутри угла  $ABI$ . Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника  $BB'I$ , проведенные в точках  $B'$  и  $I$ , пересекаются на прямой  $AC$ .

**11 класс****Второй день**

- 11.5. Пусть  $P(x)$  — многочлен степени  $n \geq 2$  с неотрицательными коэффициентами, а  $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что числа  $\sqrt[n]{P(a)}$ ,  $\sqrt[n]{P(b)}$  и  $\sqrt[n]{P(c)}$  также являются длинами сторон некоторого треугольника.
- 11.6. В некоторых клетках квадрата  $200 \times 200$  стоит по одной фишке — красной или синей; остальные клетки пусты. Одна фишка *видит* другую, если они находятся в одной строке или одном столбце. Известно, что каждая фишка видит ровно пять фишек другого цвета (и, возможно, некоторое количество фишек своего цвета). Найдите наибольшее возможное количество фишек, стоящих в клетках.
- 11.7. Изначально на доске написано натуральное число  $N$ . В любой момент Миша может выбрать число  $a > 1$  на доске, стереть его и дописать все натуральные делители  $a$ , кроме него самого (на доске могут появляться одинаковые числа). Через некоторое время оказалось, что на доске написано  $N^2$  чисел. При каких  $N$  это могло случиться?
- 11.8. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Обозначим через  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  и  $I_D$  центры окружностей  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$  и  $\omega_D$ , вписанных в треугольники  $DAB$ ,  $ABC$ ,  $BCD$  и  $CDA$  соответственно. Оказалось, что  $\angle BI_AA + \angle ICIAI_D = 180^\circ$ . Докажите, что  $\angle BI_BA + \angle ICIBI_D = 180^\circ$ .

**11 класс****Второй день**

- 11.5. Пусть  $P(x)$  — многочлен степени  $n \geq 2$  с неотрицательными коэффициентами, а  $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что числа  $\sqrt[n]{P(a)}$ ,  $\sqrt[n]{P(b)}$  и  $\sqrt[n]{P(c)}$  также являются длинами сторон некоторого треугольника.
- 11.6. В некоторых клетках квадрата  $200 \times 200$  стоит по одной фишке — красной или синей; остальные клетки пусты. Одна фишка *видит* другую, если они находятся в одной строке или одном столбце. Известно, что каждая фишка видит ровно пять фишек другого цвета (и, возможно, некоторое количество фишек своего цвета). Найдите наибольшее возможное количество фишек, стоящих в клетках.
- 11.7. Изначально на доске написано натуральное число  $N$ . В любой момент Миша может выбрать число  $a > 1$  на доске, стереть его и дописать все натуральные делители  $a$ , кроме него самого (на доске могут появляться одинаковые числа). Через некоторое время оказалось, что на доске написано  $N^2$  чисел. При каких  $N$  это могло случиться?
- 11.8. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Обозначим через  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  и  $I_D$  центры окружностей  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$  и  $\omega_D$ , вписанных в треугольники  $DAB$ ,  $ABC$ ,  $BCD$  и  $CDA$  соответственно. Оказалось, что  $\angle BI_AA + \angle ICIAI_D = 180^\circ$ . Докажите, что  $\angle BI_BA + \angle ICIBI_D = 180^\circ$ .