Материалы для проведения регионального этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Первый день

30–31 января 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, Н. В. Богачёв, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гаврилюк, Н. А. Гладков, М. А. Григорьев, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, А. П. Зимин, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, С. О. Кудря, В. Д. Лучкин, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, Б. А. Обухов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. Д. Труфанов, М. А. Фадин, И. И. Фролов, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2016–2017 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2016–2017 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **30 января 2017 г.** (I тур) и **31 января 2017 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 8 задач — по 4 задачи в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–4 — I тур, задачи 5–8 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2016–2017 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, проведение апелляций и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется также осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016–2017 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

Ответ. Да, могло.

Решение. В качестве примера подходит произведение $1 \cdot 1 \cdot 676$. После указанной операции получается $(-2) \cdot (-2) \cdot 673 = 2692 = 676 + 2016$.

Замечание. Приведённый пример — единственный. Укажем, как его придумать. Предположим, что два из сомножителей равнялись 1, а третий — a. Их произведение было равно a, а после уменьшения превратилось в $(-2)^2(a-3) = 4a - 12$. Значит, при $4a - 12 = a + 2016$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 676$.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Предъявлен набор чисел, удовлетворяющий условию — 7 баллов.

Во в целом правильном решении из-за арифметической ошибки получен в качестве ответа набор 1, 1, a, где значение a ошибочно — 5 баллов.

9.2. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть? (*И. Богданов*)

Ответ. За 2 хода.

Решение. Покажем сначала, как Пете выиграть за 2 хода. Первым ходом он выставит 8 ладей по диагонали доски. Если он ещё не выиграл, то на диагонали есть нечётное число заду-

манных Васей клеток. В частности, на ней есть как клетка A, задуманная Васей, так и клетка B, не задуманная им.

Пусть на втором ходу Петя поставит ладьи на 6 диагональных клеток, кроме A и B, а также на клетки C и D, лежащие в тех же строках, что A и B соответственно, и в тех же столбцах, что B и A соответственно. Каждая новая ладья стоит или в одной строке, или в одном столбце с A, то есть их клетки Вася задумать не мог. Значит, в новой конфигурации ладей количество клеток, задуманных Васей, уменьшилось ровно на одну, то есть стало чётным, и Петя выиграл.

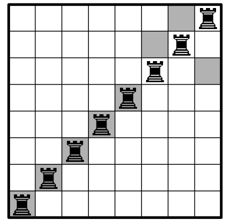

Рис. 1

Осталось показать, что Петя не может гарантированно выиграть за один ход. Пусть у него это получилось. Переставив столбцы доски, можно считать, что он сделал первый ход так, как показано на рис. 1; тогда он не выиграет, если Васины клетки — отмеченные серым на том же рисунке.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказано только, что за один ход Петя не может выиграть — 1 балл.

Доказано только, что за два хода Петя может гарантированно выиграть — 6 баллов.

Приведён верный алгоритм, позволяющий Пете гарантированно выиграть за 2 хода (возможно, без обоснования и без доказательства невозможности гарантированного выигрыша за 1 ход) — не менее 4 баллов.

9.3. Существует ли треугольник со сторонами x, y и z такой, что $x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)(y+z)(z+x)$? (*В. Сендеров*)

Ответ. Нет, не существует.

Первое решение. Пусть такой треугольник существует. Можно считать, что $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда по неравенству треугольника $y + z > x$, откуда

$$(x+y)(x+z)(y+z) > (x+y)(x+z)x = x^3 + x^2y + x^2z + xyz > \\ > x^3 + x^2y + x^2z \geqslant x^3 + y^3 + z^3.$$

Противоречие.

Замечание. В подобном решении можно обойтись и без упорядочения переменных. Именно,

$$(x+y)(x+z)(y+z) = x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2xyz >$$
$$> x^2 \cdot x + y^2 \cdot y + z^2 \cdot z + 0$$

по неравенству треугольника.

Второе решение. Пусть такой треугольник существует. Отметим точки касания его сторон со вписанной окружностью. Пусть отрезки касательных от вершин до этих точек точек касания равны a, b и c, тогда $x = b+c$, $y = a+c$ и $z = a+b$. Имеем

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (a+2b+c)(a+b+2c)(2a+b+c) =$$
$$= 2(a^3+b^3+c^3) + 7(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) + 16abc$$

и

$$x^3+y^3+z^3 = (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3 =$$
$$= 2(a^3+b^3+c^3) + 3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2).$$

Значит, разность $(x+y)(y+z)(z+x) - x^3 - y^3 - z^3$ после подстановки и приведения подобных слагаемых приобретает вид $4(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+16abc$, что, очевидно, больше 0. Противоречие.

Замечание. Существуют три положительных числа x, y, z такие, что равенство из условия выполнено — например, 1, 1, $1+\sqrt{5}$. Таким образом, условие, что x, y, z являются длинами сторон треугольника, существенно.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Решения, содержащие существенные арифметические ошибки (например, неверные коэффициенты после раскрытия скобок во втором решении, приведённом выше), оцениваются не более, чем в 3 балла.

9.4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ касается ω. Окружность Ω_b с центром P проходит через B, а окружность Ω_c с центром Q проходит через C. Докажите, что окружности Ω, Ω_b и Ω_c имеют общую точку. *(А. Акопян, П. Кожевников)*

Первое решение. Пусть O — центр треугольника ABC, и пусть ω касается отрезков BQ, QP и PC в точках K, L и M

соответственно (см. рис. 2). В силу симметрии равностороннего треугольника прямые BO и CO проходят через точки M и K соответственно.

Отложим на луче LO отрезок OX, равный OA (так что X лежит на окружности Ω). Поскольку PL и PM — касательные к ω, имеем $\angle POL = \angle POM$, а значит, $\angle POB = \angle POX$. Тогда треугольники POB и POX равны по двум сторонам ($OB = OX$, сторона OP — общая) и углу между ними. Итак, $PX = PB$, то есть точка X лежит на окружности Ω_b. Аналогично, X лежит и на окружности Ω_c.

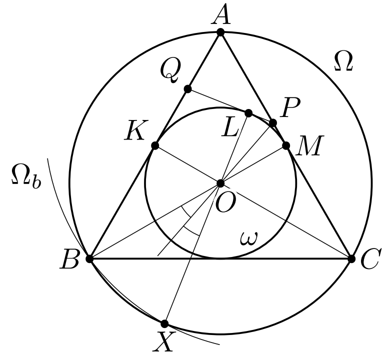

Рис. 2

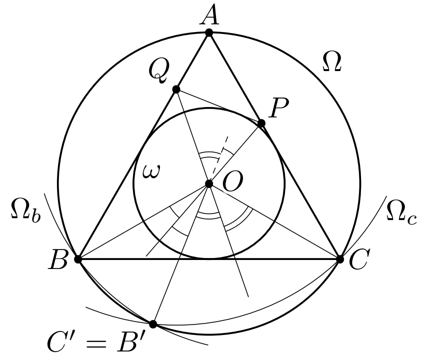

Рис. 3

Второе решение. Пусть O — центр треугольника ABC. Окружности Ω и Ω_b пересекаются в точке B. Вторая точка их пересечения — обозначим её через B' — симметрична точке B относительно линии центров PO (см. рис. 3). Аналогично, вторая точка пересечения окружностей Ω и Ω_c — это точка C', симметричная точке C относительно QO.

Мы докажем, что $B' = C'$ (тогда эта точка и будет общей у трёх окружностей). Имеем $OB' = OB = OC = OC'$; значит, достаточно понять, что $\angle BOB' + \angle COC' = \angle BOC (= 120^\circ)$. Поскольку прямые PO и QO — биссектрисы углов BOB' и COC', последнее равенство равносильно равенству $\angle POQ = 60^\circ$.

Это равенство нехитро проверяется. Так как $\angle A = 60^\circ$, то $\angle BQP + \angle CPQ = 240^\circ$, поэтому $\angle POQ = 180^\circ - (\angle OQP + \angle OPQ) = 180^\circ - (\angle BQP + \angle CPQ)/2 = 60^\circ$, что и требовалось.

Комментарий. Только за подсчёт некоторых углов без дальнейших продвижений (например, если доказано только, что $\angle POQ = 60^\circ$) баллы не ставятся.

Задача сведена к следующему утверждению (или эквивалентному ему): точка, симметричная B относительно PO, и точка, симметричная C относительно PO, совпадают — 3 балла.

Базовые факты про правильный треугольник (например, совпадение центров вписанной и описанной окружностей, его симметричность относительно биссектрис и т.п.) принимаются без доказательства.

10 класс

10.1. В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

Ответ. Да, могло.

Решение. В качестве примера подходит произведение $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 48$. После указанной операции получается

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 45 = 720 = 15 \cdot 48.$$

Замечание. Приведённый пример — единственный. Укажем, как его придумать. Предположим, что четыре из сомножителей равнялись 1, а пятый — a. Их произведение было равно a, а после уменьшения превратилось в $(-2)^4(a-3) = 16a-48$. Значит, при $16a-48 = 15a$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 48$.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Предъявлен набор чисел, удовлетворяющий условию — 7 баллов.

Во в целом правильном решении из-за арифметической ошибки получен в качестве ответа набор 1, 1, 1, 1, a, где значение a ошибочно — 5 баллов.

10.2. Окружность с центром в точке I вписана в четырёхугольник $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC пересекаются в точке Q. Известно, что точка P лежит на окружности ω, описанной около треугольника AIC. Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности ω. (*А. Кузнецов*)

Решение. Так как четырёхугольник $AICP$ вписанный, то $\angle PCI = 180^\circ - \angle PAI = \angle BAI$; иначе говоря, $\angle DCI = \angle BAI$ (см. рис. 4). Центр I вписанной окружности четырёхугольника лежит на биссектрисах его углов, поэтому $\angle DCI = \angle BCI$ и $\angle DAI = \angle BAI$. Отсюда следует, что $\angle DAI = \angle BCI$, а значит, $\angle QAI = \angle BCI = 180^\circ - \angle QCI$.

Из полученного равенства вытекает, что четырёхугольник $AICQ$ вписанный. Тем самым, точка Q лежит на окружности ω (проходящей через точки A, I и C).

Комментарий. Доказано только, что $\angle DAI = \angle DCI = \angle BAI = \angle BCI$ или что $\angle BAD = \angle BCD$ — 3 балла.

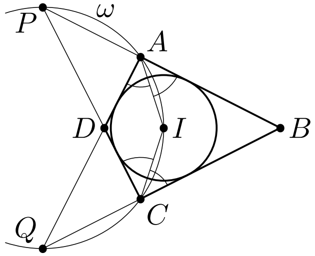

Рис. 4

(Только за доказательство равенства $\angle DCI = \angle BAI$ баллы не начисляются.)

Доказано, что четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно BD — не менее 5 баллов.

(За утверждение о том, что $ABCD$ симметричен относительно BD, без доказательства или с неправильным доказательством баллы не начисляются.)

10.3. Паша выбрал 2017 (не обязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ и играет сам с собой в следующую игру. Изначально у него есть неограниченный запас камней и 2017 больших пустых коробок. За один ход Паша добавляет в любую коробку (по своему выбору) a_1 камней, в любую из оставшихся коробок (по своему выбору) — a_2 камней, $\ldots$, наконец, в оставшуюся коробку — a_{2017} камней. Пашина цель — добиться того, чтобы после некоторого хода во всех коробках стало поровну камней. Мог ли он выбрать числа так, чтобы цели можно было добиться за 43 хода, но нельзя — за меньшее ненулевое число ходов? *(И. Богданов)*

Ответ. Да, мог.

Решение. Заметим, что $2017 = 43{\cdot}46+39$. Приведём пример Пашиных чисел, при которых требуемое выполняется. Пусть среди его чисел будут 39 двоек, 46 чисел, равных 44, а остальные — единицы.

Чтобы добиться требуемого за 43 хода, Паша выбирает 39 коробок, в которые он всегда кладёт по 2 камня — через 43 хода в них окажется по $43{\cdot}2 = 86$ камней. Остальные коробки он разбивает на 43 группы по 46 коробок; на i-м ходу он положит по 44 камня во все коробки i-й группы и по одному камню — в

коробки остальных групп. Тогда через 43 хода в каждой коробке каждой группы будет по $44 + 42 \cdot 1 = 86$ камней, то есть во всех коробках будет поровну камней.

Осталось доказать, что за меньшее число ходов требуемое невыполнимо. Пусть Паша сделал $k < 43$ ходов. Тогда в какую-то коробку A попало 44 камня на одном ходу, и в ней будет не меньше, чем $44 + (k-1) \cdot 1 = 43 + k$ камней. С другой стороны, поскольку $46k < 2017$, в какую-то коробку B ни на одном из ходов не попадёт 44 камня, то есть в ней будет не больше $2k$ камней. Поскольку $k < 43$, имеем $2k < k + 43$, а значит, в коробке B меньше камней, чем в A. Таким образом, Паша ещё не добился требуемого.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Например, подойдёт также набор чисел, состоящий из 42 единиц, $2017 - 43 = 1974$ чисел, равных $a > 1$, и одного числа, равного $43a - 42$. Существуют даже примеры с попарно различными числами; однако проверка того, что они подходят, несколько труднее, чем для примеров, приведённых выше.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Только предъявлен верный пример набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ — 3 балла.

Предъявлен верный пример набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ и проверено, что можно уравнять количества камней в коробках за 43 хода (но нет доказательства того, что невозможно уравнять менее чем за 43 хода) — 4 балла.

Предъявлен верный пример набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ и доказано, что невозможно уравнять количества камней в коробках менее чем за 43 хода (без проверки того, что можно уравнять за 43 хода) — 5 баллов.

(Вышеупомянутые баллы могут быть снижены, если проверка оставшегося недоказанным утверждения затруднительна.)

Только идея конструирования нужного набора $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ с несколькими «большими» a_i (создающими препятствия для уравнивания за малое число ходов) — 1 балл.

10.4. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным? *(Г. Жуков)*

Ответ. При $k = 2017$.

Решение. Сначала докажем, что $k > 2016$. Пусть учитель использовал некоторое $k \leqslant 2016$, задумав многочлен $P(x)$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) + (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_k)$. Заметим, что степень многочлена $Q(x)$ также равна 2017, а его старший коэффициент также равен 1. При этом $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$, но $P(x) \neq Q(x)$. Значит, дети могли бы найти многочлен $Q(x)$ вместо $P(x)$, то есть учитель не добился требуемого.

Осталось доказать, что при $k = 2017$ учитель сможет придумать требуемую задачу.

Лемма. *Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, и пусть a и b — различные целые числа. Тогда $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.*

Доказательство. В разности $P(a)-P(b)$ сгруппируем слагаемые по степеням: если $P(x) = p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1x+p_0$, то $P(a)-P(b) = p_n(a^n-b^n)+p_{n-1}(a^{n-1}-b^{n-1})+\ldots+p_1(a-b)$, где каждое слагаемое делится на $a - b$. $\square$

Пусть $k = 2017$. Положим $n_i = 4i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$; пусть учитель сообщит детям, что $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = 1$. Тогда многочлен $P(x) = (x-n_1)(x-n_2)\ldots(x-n_k)+1$ под условие подходит. Предположим, что ещё какой-то многочлен $Q(x)$ также подходит под условие. Тогда, так как $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k) = 1$ и коэффициенты многочлена $Q(x)$ — целые числа, то $Q(n_i) = \pm1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если найдутся i и j такие, что $Q(n_i) = 1$, а $Q(n_j) = -1$, то разность $Q(n_i) - Q(n_j) = 2$ не делится на $n_i - n_j$, что противоречит лемме. Поэтому все значения $Q(n_i)$ равны между собой и все равны либо 1, либо -1. Однако все значения не могут быть равны -1, так как в произведении $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$

множителей нечетное количество и произведение было бы равно -1. Значит, $Q(n_i) = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда разность $P(x) - Q(x)$ — многочлен степени менее k, имеющий хотя бы k корней, то есть этот многочлен тождественно равен 0, и $P(x) = Q(x)$. Противоречие.

Замечание. С использованием леммы можно показать, что многочлен $P(x) = (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_{2017}) \pm 1$ подходит при *любых* различных целых числах $n_1, n_2, \ldots, n_{2017}$.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Полное решение задачи состоит из двух частей:

(*а*) доказательство того, что требуемого нельзя добиться при $k \leqslant 2016$ — оценивается из 2 баллов;

(*б*) доказательство того что при $k = 2017$ требуемого добиться можно — оценивается из 5 баллов.

Если в части (*б*) предъявлен многочлен $P(x) = (x-n_1)(x-n_2)\ldots(x - n_k) \pm 1$ (при некоторых различных целых $n_1, n_2, \ldots, n_k$), но не доказано, что никакой другой многочлен $Q(x)$ не удовлетворяет условию — 2 балла (из пяти).

За использование леммы о делимости $P(a) - P(b)$ на $a - b$ без доказательства баллы не снимаются.

11 класс

11.1. В произведении семи натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 13 раз? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

Ответ. Да, могло.

Решение. В качестве примера подходит произведение $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 16 = 32$. После указанной операции получается $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 13 = 13 \cdot 32$.

Замечание 1. Укажем, как придумать этот пример. Предположим, что пять из сомножителей равнялись 1, шестой — 2, а седьмой — a. Их произведение было равно $2a$, а после уменьшения превратилось в $(-2)^5(-1)(a-3) = 32a - 96$. Значит, при $32a - 96 = 26a$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 16$. Итак, числа 1, 1, 1, 1, 1, 2, 16 удовлетворяют требованиям.

Замечание 2. Приведённый пример — не единственный. Например, подойдёт также произведение $1^4 \cdot 29 \cdot 61 \cdot 64$, после вычитания переходящий в $(-2)^4 \cdot 26 \cdot 58 \cdot 61$.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Предъявлен набор чисел, удовлетворяющий условию — 7 баллов.

Во в целом правильном решении из-за арифметической ошибки получен в качестве ответа набор 1, 1, 1, 1, 1, 2, a, где значение a ошибочно — 5 баллов.

11.2. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть? (*И. Богданов*)

Ответ. За 2 хода.

Решение. Покажем сначала, как Пете выиграть за 2 хода. Первым ходом он выставит 8 ладей по диагонали доски. Если

он ещё не выиграл, то на диагонали есть нечётное число задуманных Васей клеток. В частности, на ней есть как клетка A, задуманная Васей, так и клетка B, не задуманная им.

Пусть на втором ходу Петя поставит ладьи на 6 диагональных клеток, кроме A и B, а также на клетки C и D, лежащие в тех же строках, что A и B соответственно, и в тех же столбцах, что B и A соответственно. Каждая новая ладья стоит или в одной строке, или в одном столбце с A, то есть их клетки Вася задумать не мог. Значит, в новой конфигурации ладей количество клеток, задуманных Васей, уменьшилось ровно на одну, то есть стало чётным, и Петя выиграл.

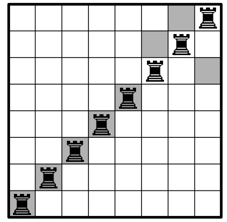

Рис. 5

Осталось показать, что Петя не может гарантированно выиграть за один ход. Пусть у него это получилось. Переставив столбцы доски, можно считать, что он сделал первый ход так, как показано на рис. 1; тогда он не выиграет, если Васины клетки — отмеченные серым на том же рисунке.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказано только, что за один ход Петя не может выиграть — 1 балл.

Доказано только, что за два хода Петя может гарантированно выиграть — 6 баллов.

Приведён верный алгоритм, позволяющий Пете гарантированно выиграть за 2 хода (возможно, без обоснования и без доказательства невозможности гарантированного выигрыша за 1 ход) — не менее 4 баллов.

11.3. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным? (*Г. Жуков*)

Ответ. При $k = 2017$.

Решение. Сначала докажем, что $k > 2016$. Пусть учитель использовал некоторое $k \leqslant 2016$, задумав многочлен $P(x)$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) + (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_k)$. Заметим, что степень многочлена $Q(x)$ также равна 2017, а его старший коэффициент также равен 1. При этом $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$, но $P(x) \neq Q(x)$. Значит, дети могли бы найти многочлен $Q(x)$ вместо $P(x)$, то есть учитель не добился требуемого.

Осталось доказать, что при $k = 2017$ учитель сможет придумать требуемую задачу.

Лемма. *Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, и пусть a и b — различные целые числа. Тогда $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.*

Доказательство. В разности $P(a)-P(b)$ сгруппируем слагаемые по степеням: если $P(x) = p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1x+p_0$, то $P(a)-P(b) = p_n(a^n-b^n)+p_{n-1}(a^{n-1}-b^{n-1})+\ldots+p_1(a-b)$, где каждое слагаемое делится на $a - b$. □

Пусть $k = 2017$. Положим $n_i = 4i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$; пусть учитель сообщит детям, что $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = 1$. Тогда многочлен $P(x) = (x-n_1)(x-n_2)\ldots(x-n_k)+1$ под условие подходит. Предположим, что ещё какой-то многочлен $Q(x)$ также подходит под условие. Тогда, так как $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k) = 1$ и коэффициенты многочлена $Q(x)$ — целые числа, то $Q(n_i) = \pm1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если найдутся i и j такие, что $Q(n_i) = 1$, а $Q(n_j) = -1$, то разность $Q(n_i) - Q(n_j) = 2$ не делится на $n_i - n_j$, что противоречит лемме. Поэтому все значения $Q(n_i)$ равны между собой и все равны либо 1, либо -1. Однако все значения не могут быть равны -1, так как в произведении $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$ множителей нечетное количество и произведение было бы равно -1. Значит, $Q(n_i) = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда разность $P(x) - Q(x)$ — многочлен степени менее k, имеющий хотя бы k корней, то есть этот многочлен тождественно равен 0, и $P(x) = Q(x)$. Противоречие.

Замечание. С использованием леммы можно показать, что

многочлен $P(x) = (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_{2017}) \pm 1$ подходит при *любых* различных целых числах $n_1, n_2, \ldots, n_{2017}$.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Полное решение задачи состоит из двух частей:

(*а*) доказательство того, что требуемого нельзя добиться при $k \leqslant 2016$ — оценивается из 2 баллов;

(*б*) доказательство того что при $k = 2017$ требуемого добиться можно — оценивается из 5 баллов.

Если в части (*б*) предъявлен многочлен $P(x) = (x-n_1)(x-n_2)\ldots(x-n_k) \pm 1$ (при некоторых различных целых $n_1, n_2, \ldots, n_k$), но не доказано, что никакой другой многочлен $Q(x)$ не удовлетворяет условию — 2 балла (из пяти).

За использование леммы о делимости $P(a) - P(b)$ на $a - b$ без доказательства баллы не снимаются.

11.4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω. *(А. Акопян)*

Решение. Пусть O — центр треугольника ABC. Обозначим через B_2 и C_2 точки касания ω с AC и AB соответственно, а через B_1 и C_1 — точки Ω, диаметрально противоположные точкам B и C соответственно (см. рис. 6). Тогда точки B_1 и C_1 симметричны O относительно сторон AC и AB соответственно, откуда $\angle OB_1P = \angle B_1OP$ и $\angle OC_1Q = \angle C_1OQ$.

Пусть лучи B_1P и C_1Q пересекают Ω в точках B' и C' соответственно; тогда $\angle PB'B = \angle B_1B'B = 90^\circ$, то есть B' лежит на Γ_b. Аналогично, C' лежит на Γ_c. С другой стороны, $\overset{\smile}{BB'} + \overset{\smile}{CC'} = 2(\angle BB_1B' + \angle CC_1C') = 2(\angle B_1OP + \angle C_1OQ) = 2(180^\circ - \angle B_1OC_1) = 120^\circ = \overset{\smile}{BC}$; это означает, что точки B' и C' совпадают. Итак, Γ_b и Γ_c пересекаются в точке B', лежащей на Ω.

Поскольку $\angle BB_2P = \angle CC_2Q = 90^\circ$, точки B_2 и C_2 лежат на Γ_b и Γ_c соответственно. Пусть продолжение отрезка $B'O$ за

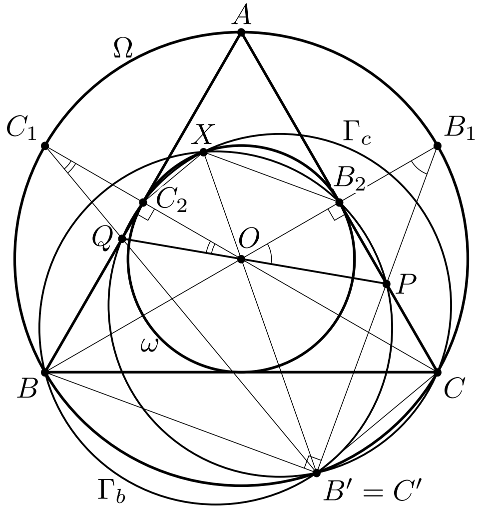

Рис. 6

точку O пересекает ω в точке X. Тогда $OX = OB_2 = OC_2$ и $OB' = OB = OC$, откуда $OB \cdot OB_2 = OB' \cdot OX = OC \cdot OC_2$. Первое из этих равенств означает, что точки B, B_2, B' и X лежат на одной окружности, то есть X лежит на окружности Γ_b. Аналогично, из второго равенства следует, что X лежит на Γ_c. Значит, X и является второй точкой пересечения Γ_b и Γ_c, лежащей на ω.

Замечание 1. После доказательства того, что окружности Ω, Γ_b и Γ_c пересекаются в одной точке B', можно завершить решение и по-другому. Пусть X — вторая точка пересечения Γ_b и Γ_c. Нетрудно видеть, что точка X лежит в угле C_2OB_2. Тогда $\angle B_2XC_2 = \angle B_2XB' + \angle C_2XB' = (180^\circ - \angle B_2PB') + (180^\circ - \angle C_2QB') = (90^\circ - \angle PB_1O) + (90^\circ - \angle QC_1O) = 120^\circ$, что и означает, что X лежит на ω.

Замечание 2. Пусть прямая PQ пересекает прямую BC в точке R. Аналогично можно показать, что окружность Γ_a с диаметром AR также проходит через две общих точки B' и X окружностей Γ_b и Γ_c.

Комментарий. Показано только, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках — 0 баллов.

Показано только, что одна из точек пересечения этих окружностей лежит на Ω — 3 балла.

Показано только, что одна из точек пересечения этих окружностей лежит на ω — 4 балла.