9 класс

Второй день

9.5. На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Вася выигрывает, если после окрашивания всех точек найдётся равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причём в один и тот же цвет. Может ли Петя ему помешать?

9.6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

9.7. В карточной игре каждой карте сопоставлено числовое значение от 1 до 100, причём каждая карта бьёт меньшую, за одним исключением: 1 бьёт 100. Игрок знает, что перед ним лежат рубашками вверх 100 карт с различными значениями. Крупье, знающий порядок этих карт, может про любую пару карт сообщить игроку, какая из них какую бьёт. Докажите, что крупье может сделать сто таких сообщений, чтобы после этого игрок смог точно узнать значение каждой карты.

9.8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Вася выигрывает, если после окрашивания всех точек найдётся равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причём в один и тот же цвет. Может ли Петя ему помешать?

9.6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

9.7. В карточной игре каждой карте сопоставлено числовое значение от 1 до 100, причём каждая карта бьёт меньшую, за одним исключением: 1 бьёт 100. Игрок знает, что перед ним лежат рубашками вверх 100 карт с различными значениями. Крупье, знающий порядок этих карт, может про любую пару карт сообщить игроку, какая из них какую бьёт. Докажите, что крупье может сделать сто таких сообщений, чтобы после этого игрок смог точно узнать значение каждой карты.

9.8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

10 класс

Второй день

10.5. В таблицу 10×10 записаны положительные числа так, что в любой строке числа образуют арифметическую прогрессию (в порядке следования слева направо), а в любом столбце — геометрическую прогрессию (в порядке следования сверху вниз). Докажите, что знаменатели всех этих геометрических прогрессий равны.

10.6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число a^n+1 **не** делится на n^b+1.

10.7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

10.8. Доска для игры состоит из левой и правой частей. В каждой части есть несколько полей; между ними проведено несколько отрезков, каждый соединяет два поля из разных частей. При этом с любого поля можно по отрезкам добраться до любого другого. Изначально на одном поле левой части стоит лиловая фишка, а на одном поле правой — пурпурная. Лёша и Паша ходят по очереди; начинает Паша. За ход игрок перемещает свою фишку (Лёша — лиловую, а Паша — пурпурную) по отрезку на поле, на котором нет другой фишки. При этом запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них лиловая фишка стоит на одном и том же поле, и пурпурная — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Существуют ли доска и начальное расположение фишек, при которых у Паши есть выигрышная стратегия?

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. В таблицу 10×10 записаны положительные числа так, что в любой строке числа образуют арифметическую прогрессию (в порядке следования слева направо), а в любом столбце — геометрическую прогрессию (в порядке следования сверху вниз). Докажите, что знаменатели всех этих геометрических прогрессий равны.

10.6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число a^n+1 **не** делится на n^b+1.

10.7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

10.8. Доска для игры состоит из левой и правой частей. В каждой части есть несколько полей; между ними проведено несколько отрезков, каждый соединяет два поля из разных частей. При этом с любого поля можно по отрезкам добраться до любого другого. Изначально на одном поле левой части стоит лиловая фишка, а на одном поле правой — пурпурная. Лёша и Паша ходят по очереди; начинает Паша. За ход игрок перемещает свою фишку (Лёша — лиловую, а Паша — пурпурную) по отрезку на поле, на котором нет другой фишки. При этом запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них лиловая фишка стоит на одном и том же поле, и пурпурная — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Существуют ли доска и начальное расположение фишек, при которых у Паши есть выигрышная стратегия?

11 класс

Второй день

11.5. На столе по кругу разложены 1000 карточек, на каждой написано по натуральному числу; все эти числа различны. Сначала Вася выбирает одну из карточек и снимает её со стола. Далее он повторяет следующую операцию. Если на последней снятой карточке было написано число k, то Вася отсчитывает от неё по часовой стрелке k-ую не снятую со стола карточку и тоже снимает её. Это происходит до тех пор, пока на столе не останется одна карточка. Могло ли оказаться, что в начальном расположении есть такая карточка A, что если снять первой любую другую карточку, то в конце останется обязательно карточка A?

11.6. Три диагонали правильной n-угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке O. Докажите, что точка O — центр призмы. (*Диагональ* призмы — это отрезок, соединяющий две её вершины, не находящиеся в одной грани.)

11.7. Определим последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ формулой $a_n = \left[n^{\frac{2018}{2017}}\right]$. Докажите, что существует такое натуральное число N, что среди любых N подряд идущих членов последовательности есть такой, десятичная запись которого содержит цифру 5. (Как обычно, через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.)

11.8. Изначально в левом нижнем и правом нижнем углах доски 2018×2018 стоят два *скакуна* — красный и синий, соответственно. Коля и Саша ходят по очереди; начинает Коля. За ход игрок перемещает своего скакуна (Коля — красного, а Саша — синего), сдвигая его одновременно на 20 клеток по одной из координат и на 17 по другой; при этом скакун не может вставать на клетку, занятую другим скакуном. Запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них красный скакун стоит на одном и том же поле, и синий — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. На столе по кругу разложены 1000 карточек, на каждой написано по натуральному числу; все эти числа различны. Сначала Вася выбирает одну из карточек и снимает её со стола. Далее он повторяет следующую операцию. Если на последней снятой карточке было написано число k, то Вася отсчитывает от неё по часовой стрелке k-ую не снятую со стола карточку и тоже снимает её. Это происходит до тех пор, пока на столе не останется одна карточка. Могло ли оказаться, что в начальном расположении есть такая карточка A, что если снять первой любую другую карточку, то в конце останется обязательно карточка A?

11.6. Три диагонали правильной n-угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке O. Докажите, что точка O — центр призмы. (*Диагональ* призмы — это отрезок, соединяющий две её вершины, не находящиеся в одной грани.)

11.7. Определим последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ формулой $a_n = \left[n^{\frac{2018}{2017}}\right]$. Докажите, что существует такое натуральное число N, что среди любых N подряд идущих членов последовательности есть такой, десятичная запись которого содержит цифру 5. (Как обычно, через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.)

11.8. Изначально в левом нижнем и правом нижнем углах доски 2018×2018 стоят два *скакуна* — красный и синий, соответственно. Коля и Саша ходят по очереди; начинает Коля. За ход игрок перемещает своего скакуна (Коля — красного, а Саша — синего), сдвигая его одновременно на 20 клеток по одной из координат и на 17 по другой; при этом скакун не может вставать на клетку, занятую другим скакуном. Запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них красный скакун стоит на одном и том же поле, и синий — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?