Материалы для проведения регионального этапа

XLVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2019–2020 учебный год

Первый день

3–4 февраля 2020 г.

Москва, 2019

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, Л. А. Емельянов, Р. Г. Женодаров, П. Ю. Козлов, П. А. Кожевников, Д. Н. Крачун, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, В. С. Кулишов, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, О. С. Смирнов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, Е. О. Холмогоров, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **3 февраля 2020 г.** (I тур) и **4 февраля 2020 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2019–2020 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 3 февраля 2020 г., по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Изначально на столе лежали 10 куч конфет, в которых было $1, 2, \ldots, 10$ конфет соответственно. Малыш решил перераспределить конфеты. На каждой нечётной минуте он выбирает одну из куч и делит её на две кучи, в каждой из которых хотя бы по одной конфете. На каждой чётной минуте он выбирает две кучи и объединяет их в одну (таким образом, первым действием он делит кучу на две). Может ли в некоторый момент оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет? (*Н. Агаханов, жюри*)

Ответ. Может.

Решение. Приведём пример, как Малыш может добиться такого распределения. На первой минуте он делит кучку из 10 конфет на две кучки по 5 конфет. Далее на 2-й, 4-й, 6-й, 8-й минутах он соединяет кучки $1+9$, $2+8$, $3+7$, $4+6$ соответственно, а на 3-й, 5-й, 7-й, 9-й минутах делит только что полученную кучу из 10 конфет на две равных части. На 9-й минуте он получает 11 куч по 5 конфет.

Замечание. Существуют и другие способы получить 11 куч по 5 конфет. С другой стороны, количество куч на столе всегда равно 10 или 11; отсюда нетрудно видеть, что если требуемое произошло, то на столе появилось именно 11 куч по 5 конфет в каждой.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Любой верный алгоритм, приводящий к цели — 7 баллов.

9.2. На доске написаны n различных целых чисел, любые два из них отличаются хотя бы на 10. Сумма квадратов трёх наибольших из них меньше трёх миллионов. Сумма квадратов трёх наименьших из них также меньше трёх миллионов. При каком наибольшем n это возможно? (*Р. Женодаров, С. Берлов*)

Ответ. При $n = 202$.

Решение. Заметим сразу, что $990^2 + 1000^2 + 1010^2 = (1000 - 10)^2 + 1000^2 + (1000 + 10)^2 = 3 \cdot 1000^2 + 2 \cdot 10^2$, что больше трёх миллионов. С другой стороны, $989^2+999^2+1009^2 = (1000-11)^2+(1000-1)^2+(1000+9)^2 = 3\cdot1000^2-6\cdot1000+(9^2+1^2+11^2)$, что меньше трёх миллионов.

Если неотрицательных чисел на доске не меньше, чем 102, то три наибольших из них не меньше, чем $99\cdot10 = 990$, $100\cdot10 = 1000$ и $101\cdot10 = 1010$ соответственно. Тогда по замечанию выше сумма их квадратов больше трёх миллионов, что невозможно. Поэтому неотрицательных чисел на доске не больше 101. Аналогично, отрицательных чисел не больше 101. Таким образом, общее количество чисел не больше, чем $101 + 101 = 202$.

Пример при $n = 202$ дают числа $-1009, -999, -989, \ldots, -9, 9, 19, \ldots, 999, 1009$. Из замечания выше, он подходит.

Замечание. Также в качестве примера подходят, например, числа $-1005, -995, -985, \ldots, -5, 5, 15, \ldots, 995, 1005$.

Комментарий. Только доказательство того, что $n \leqslant 202$ — 5 баллов.

Только верный пример для $n = 202$ (без обоснования оптимальности или с неверным обоснованием) — 2 балла. Верный пример с $n = 201$ числами баллов не добавляет.

Может случиться так, что участник предъявил верный пример и верное обоснование оптимальности *именно этого примера*, но неправильно подсчитывает числа в примере (например, считая, что в ряду $5, 15, 25, \ldots, 1005$ ровно 100 чисел). В этом случае стоит снять 1 балл за арифметическую ошибку. (В случае же, когда эта ошибка привела к тому, что участник просто неверно доказывает оценку $n \leqslant 200$, за эту часть баллы не добавляются).

Могут встретиться работы, авторы которых считают, что все числа на доске положительны (или неотрицательны). В этом случае применяются следующие критерии.

Только доказательство того, что положительных (неотрицательных) чисел не больше 101 — 3 балла.

Пример, состоящий из неотрицательных чисел, в этом случае баллов не добавляет.

9.3. Коля и Дима играют в игру на доске 8×8, делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (*доминошками*) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две соседних клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? (*М. Дидин*)

Ответ. Коля.

Решение. Приведём выигрышную стратегию за Колю. Мысленно раскрасим доску шахматным образом и будем ставить крестики только в чёрные клетки. Дима за один свой ход покрывает ровно одну из чёрных клеток; значит, Коля сможет сделать 16 ходов. Покажем, что Дима не сможет сделать свой 17-й ход.

Пока Коля действует по стратегии, под каждой Диминой доминошкой будет белая клетка без крестика. Поэтому Дима не сможет накрыть доминошкой ни один крестик. Тогда за 16 пар ходов все чёрные клетки будут покрыты доминошками или крестиками, но ни в одной белой клетке не будет крестика. Значит, Дима не сможет поставить доминошку, соблюдая правила игры.

Комментарий. Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 0 баллов.

Предъявлена стратегия Коли «ставь крестик на поля одного цвета» без обоснования, что она действительно приводит к выигрышу — 5 баллов.

9.4. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py+1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y. (*М. Антипов*)

Решение. Положим $p = 2k+1$. Предположим противное: для каждого из чисел $y = 1, 2, \ldots, k$ существует разложение $py+1 = a_y b_y$, где $a_y > y$, $b_y > y$. Заметим, что каждое из чисел a_y и b_y строго больше 1, а также что $a_y < p$, $b_y < p$, иначе $a_y b_y \geqslant p(y+1) > py+1$. Значит, каждое из $p-1$ чисел набора $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ лежит в множестве из $p-2$ чисел

$\{2, 3, \ldots, p-1\}$. Таким образом, в этом наборе найдутся два равных числа. Пусть каждое из этих двух чисел равно d.

Пусть эти равные числа имеют равные индексы в наборе, то есть $a_y = b_y = d$ при некотором y. Тогда $py + 1 = d^2$, поэтому число $d^2 - 1 = (d-1)(d+1) = py$ делится на простое p. Так как $1 \leqslant d-1 < d+1 \leqslant p$, это может быть лишь при $d+1 = p$. Тогда соответствующее значение y равно $d - 1 = p - 2 = 2k - 1$, что при $p > 3$ больше, чем k. Противоречие (так как $y \leqslant k$).

В противном случае существуют индексы $y_1 < y_2$ такие, что $1 \leqslant y_1 < y_2 < d$, для которых числа $py_1 + 1$ и $py_2 + 1$ делятся на d. Тогда и $p(y_2 - y_1) = (py_2 + 1) - (py_1 + 1)$ также делится на d. Из взаимной простоты чисел d и p получаем, что $y_2 - y_1$ делится на d, а это невозможно, так как $0 < y_2 - y_1 < y_2 < d$.

Таким образом, в каждом случае получено противоречие и, следовательно, указанное в условии задачи число y всегда найдётся.

Комментарий. В предположении противного доказано только, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа — 3 балла.

В предположении противного доказано, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 < y_2$ (т. е. случай $y_1 = y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

В предположении противного доказано, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 = y_2$ (т. е. случай $y_1 < y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

9.5. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Докажите, что диаметр окружности ω не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD. (*О. Южаков*)

Решение. Имеем $S_{ABCD} = pr$, где p — полупериметр четырёхугольника, а r — радиус ω. Из описанности вытекает $AB + CD = BC + DA$, откуда

$$S_{ABCD} = (BC + AD) \cdot r. \tag{1}$$

С другой стороны, если M и N — середины сторон BC и AD соответственно (см. рис. 1), имеем

$$S_{ABCD} = (S_{ABM} + S_{ACM}) + (S_{ACN} + S_{DCN}) = \\ = 2S_{ACM} + 2S_{ACN} = 2 \cdot S_{AMCN} = 2S_{AMN} + 2S_{CMN} \leqslant \\ \leqslant MN \cdot AN + MN \cdot CM = MN \cdot (AN + CM) = \\ = \frac{1}{2} MN \cdot (AD + BC).$$

Сравнивая с (1), после деления на $(AD + BC)/2$ получим требуемое неравенство $MN \geqslant 2r$.

Замечание. Из решения нетрудно видеть, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $ABCD$ — равнобокая описанная трапеция с $AD \parallel BC$.

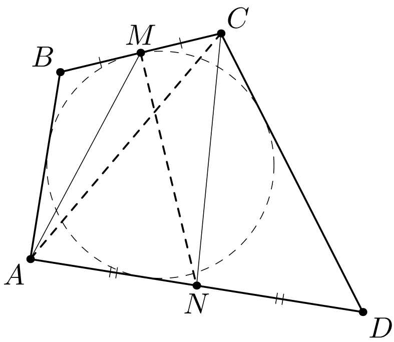

Рис. 1

Комментарий. За привлечение вспомогательной площади и равенство $S_{ABCD} = pr$ — 1 балл.

За верную формулировку (и, возможно, использование) критерия описанности $AB + CD = BC + DA$ баллы не добавляются.

10 класс

10.1. Найдите хотя бы одно четырёхзначное число, обладающее следующим свойством: если сумму всех цифр этого числа умножить на произведение всех его цифр, то в результате получится 3990. (*И. Рубанов*)

Решение. Заметим, что $3990 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ и $6 + 5 + 7 + 1 = 19$. Поэтому подойдёт любое четырёхзначное число, в записи которого по одной единице, шестёрке, пятёрке и семёрке, например, 1567.

Комментарий. Для получения полного балла достаточно предъявления любого верного примера.

10.2. Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B. (*Д. Храмцов*)

Решение. Предположим противное: множества A и B не пересекаются. Тогда их объединение содержит $2n$ различных натуральных чисел. Следовательно, сумма S всех элементов объединения множеств A и B будет не меньше суммы $1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$. С другой стороны, по условию $S = 2n^2$, что меньше, чем $n(2n + 1)$. Противоречие.

Комментарий. В предположении, что множества A и B не пересекаются, получена оценка $S \geqslant 1 + 2 + \ldots + 2n$ — не менее 5 баллов (в случае дальнейшего неверного подсчёта суммы ставится 5 баллов).

10.3. Коля и Дима играют в игру на доске 8×8, делая ходы по очереди, начинает Коля. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (*доминошками*) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? (*М. Дидин*)

Ответ. Дима.

Первое решение. Приведём стратегию за Диму. Разобьём доску на 32 прямоугольника 1×2 до начала игры. За первые 16 ходов соперник может поставить свои крестики в не более чем 16 из них, значит, мы сможем покрыть 16 остальных прямоугольников своими доминошками, и все крестики соперника будут стоять в каких-то клетках 16 остальных прямоугольников (назовем эти прямоугольники *новыми*).

Теперь покажем, что далее Дима сможет ответить на сделанный Колей $(16+k)$-й ход ($1 \leqslant k \leqslant 16$), покрывая некоторый новый прямоугольник. Коля поставил к этому моменту $16+k$ крестиков, и все эти крестики находятся в 16 новых прямоугольниках. Значит, Коля уже заполнил целиком крестиками хотя бы k новых прямоугольников, а Дима покрыл к этому моменту не более $k-1$ нового прямоугольника. Значит, перед $(16+k)$-м ходом Димы есть хотя бы один новый прямоугольник с двумя крестиками, ещё не покрытый доминошкой, и его можно покрыть этим ходом, что и требовалось доказать.

После 32-го хода Димы вся доска будет покрыта доминошками, и Коля проиграет, ибо ходить ему некуда.

Второе решение. Приведём стратегию за Диму. Разобьём доску на квадраты 2×2 до начала игры. Пусть Дима будет отвечать на крестик, поставленный впервые в каком-то квадрате, доминошкой на две пустые клетки того же квадрата. Когда Коля будет ставить второй крестик в квадрате, Дима ответным ходом накроет этот крестик и первый поставленный в этом квадрате крестик доминошкой, в результате чего квадрат окажется покрытым двумя доминошками. Таким образом, на любой ход Коли у Димы есть ответный ход.

Комментарий. Верный ответ без предъявления выигрышной стратегии — 0 баллов.

Предъявлена одна из верных выигрышных стратегий Димы без обоснования, что действительно на каждый ход Коли есть ответ — 4 балла.

В случае предъявления верной стратегии решение может быть оценено ниже, чем в 7 баллов, при наличии пробелов в доказательстве, что на каждый ход Коли у Димы действительно есть ответный ход.

10.4. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py+1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y. (*М. Антипов*)

Решение. Положим $p = 2k+1$. Предположим противное: для каждого из чисел $y = 1, 2, \ldots, k$ существует разложение $py + 1 = a_y b_y$, где $a_y > y$, $b_y > y$. Заметим, что каждое из чисел a_y и b_y строго больше 1, а также что $a_y < p$, $b_y < p$, иначе $a_y b_y \geqslant p(y+1) > py+1$. Значит, каждое из $p-1$ чисел набора $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ лежит в множестве из $p-2$ чисел $\{2, 3, \ldots, p-1\}$. Таким образом, в этом наборе найдутся два равных числа. Пусть каждое из этих двух чисел равно d.

Пусть эти равные числа имеют равные индексы в наборе, то есть $a_y = b_y = d$ при некотором y. Тогда $py + 1 = d^2$, поэтому число $d^2 - 1 = (d-1)(d+1) = py$ делится на простое p. Так как $1 \leqslant d-1 < d+1 \leqslant p$, это может быть лишь при $d+1 = p$. Тогда соответствующее значение y равно $d - 1 = p - 2 = 2k - 1$, что при $p > 3$ больше, чем k. Противоречие (так как $y \leqslant k$).

В противном случае существуют индексы $y_1 < y_2$ такие, что $1 \leqslant y_1 < y_2 < d$, для которых числа $py_1 + 1$ и $py_2 + 1$ делятся на d. Тогда и $p(y_2 - y_1) = (py_2 + 1) - (py_1 + 1)$ также делится на d. Из взаимной простоты чисел d и p получаем, что $y_2 - y_1$ делится на d, а это невозможно, так как $0 < y_2 - y_1 < y_2 < d$.

Таким образом, в каждом случае получено противоречие и, следовательно, указанное в условии задачи число y всегда найдётся.

Комментарий. В предположении противного доказано только, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа — 3 балла.

В предположении противного доказано, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 < y_2$ (т. е. случай $y_1 = y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

В предположении противного доказано, что в наборе

$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 = y_2$ (т. е. случай $y_1 < y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

10.5. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Докажите, что диаметр окружности ω не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD. (*О. Южаков*)

Решение. Имеем $S_{ABCD} = pr$, где p — полупериметр четырёхугольника, а r — радиус ω. Из описанности вытекает $AB + CD = BC + DA$, откуда

$$S_{ABCD} = (BC + AD) \cdot r. \quad (1)$$

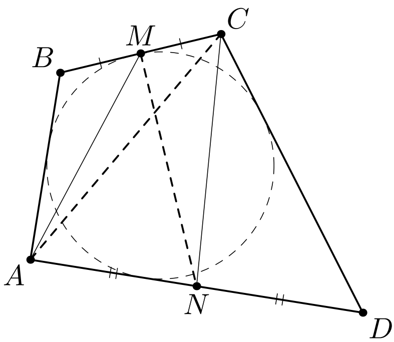

Рис. 2

С другой стороны, если M и N — середины сторон BC и AD соответственно (см. рис. 2), имеем

$$S_{ABCD} = (S_{ABM} + S_{ACM}) + (S_{ACN} + S_{DCN}) =$$
$$= 2S_{ACM} + 2S_{ACN} = 2 \cdot S_{AMCN} = 2S_{AMN} + 2S_{CMN} \leqslant$$
$$\leqslant MN \cdot AN + MN \cdot CM = MN \cdot (AN + CM) =$$
$$= \frac{1}{2} MN \cdot (AD + BC).$$

Сравнивая с (1), после деления на $(AD + BC)/2$ получим требуемое неравенство $MN \geqslant 2r$.

Замечание. Из решения нетрудно видеть, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $ABCD$ — равнобокая описанная трапеция с $AD \parallel BC$.

Комментарий. За привлечение вспомогательной площади и равенство $S_{ABCD} = pr$ — 1 балл.

За верную формулировку (и возможное использование) критерия описанности $AB + CD = BC + DA$ баллы не добавляются.

11 класс

11.1. На доске написано n различных целых чисел. Произведение двух наибольших равно 77. Произведение двух наименьших тоже равно 77. При каком наибольшем n это возможно?

(*Р. Женодаров, жюри*)

Ответ. При $n = 17$.

Решение. Числа $-11, -7, -6, -5, \ldots, 6, 7, 11$ дают пример при $n = 17$.

Допустим, что есть хотя бы 18 чисел с таким свойством. Тогда какие-то 9 из них будут одного знака (все положительны или все отрицательны). Среди этих 9 чисел модули двух наибольших будут не меньше 8 и 9 соответственно. Тогда их произведение не может быть равно 77.

Комментарий. Только доказательство того, что $n \leqslant 17$ — 5 баллов.

Только пример для $n = 17$ — 2 балла.

11.2. Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

(*Д. Храмцов*)

Решение. Предположим противное: множества A и B не пересекаются. Тогда их объединение содержит $2n$ различных натуральных чисел. Следовательно, сумма S всех элементов объединения множеств A и B будет не меньше суммы $1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$. С другой стороны, по условию $S = 2n^2$, что меньше, чем $n(2n + 1)$. Противоречие.

Комментарий. В предположении, что множества A и B не пересекаются, получена оценка $S \geqslant 1 + 2 + \ldots + 2n$ — не менее 5 баллов (в случае дальнейшего неверного подсчёта суммы ставится 5 баллов).

11.3. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. На стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH — точка E, а на отрезке CH — точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90°$.

(*Б. Обухов*)

Решение. Построим точку E', симметричную точке E относительно стороны AC (см. рис. 3). Заметим, что точка F лежит на прямой DE', ибо $\angle DFC = \angle EFA = \angle E'FA$ в силу симметрии. Из прямоугольных треугольников ABC и BCH получаем $\angle E'BC = 90^\circ - \angle ACB = \angle BAC$.

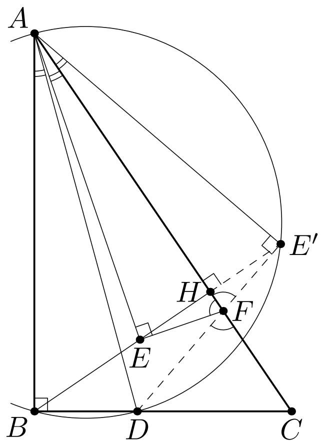

Рис. 3

Заметим, что $\angle BAD = \angle CAE = \angle CAE'$. Значит, $\angle DAE' = \angle CAE' + \angle DAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle BAC = \angle E'BC$. Это означает, что четырехугольник $ABDE'$ — вписанный. Следовательно, поскольку $\angle ABD = 90^\circ$, то $\angle AE'D = 90^\circ$. Тогда в силу симметрии $\angle AEF = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

11.4. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py + 1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y. *(М. Антипов)*

Решение. Положим $p = 2k + 1$. Предположим противное: для каждого из чисел $y = 1, 2, \ldots, k$ существует разложение $py + 1 = a_y b_y$, где $a_y > y$, $b_y > y$. Заметим, что каждое из чисел a_y и b_y строго больше 1, а также что $a_y < p$, $b_y < p$, иначе $a_y b_y \geqslant p(y + 1) > py + 1$. Значит, каждое из $p - 1$ чисел набора $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ лежит в множестве из $p - 2$ чисел $\{2, 3, \ldots, p-1\}$. Таким образом, в этом наборе найдутся два равных числа. Пусть каждое из этих двух чисел равно d.

Пусть эти равные числа имеют равные индексы в наборе, то есть $a_y = b_y = d$ при некотором y. Тогда $py + 1 = d^2$, поэтому число $d^2 - 1 = (d-1)(d+1) = py$ делится на простое p. Так как $1 \leqslant d - 1 < d + 1 \leqslant p$, это может быть лишь при $d + 1 = p$. Тогда соответствующее значение y равно $d - 1 = p - 2 = 2k - 1$, что при $p > 3$ больше, чем k. Противоречие (так как $y \leqslant k$).

В противном случае существуют индексы $y_1 < y_2$ такие, что

$1 \leqslant y_1 < y_2 < d$, для которых числа $py_1 + 1$ и $py_2 + 1$ делятся на d. Тогда и $p(y_2 - y_1) = (py_2 + 1) - (py_1 + 1)$ также делится на d. Из взаимной простоты чисел d и p получаем, что $y_2 - y_1$ делится на d, а это невозможно, так как $0 < y_2 - y_1 < y_2 < d$.

Таким образом, в каждом случае получено противоречие и, следовательно, указанное в условии задачи число y всегда найдётся.

Комментарий. В предположении противного доказано только, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа — 3 балла.

В предположении противного доказано, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 < y_2$ (т. е. случай $y_1 = y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

В предположении противного доказано, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 = y_2$ (т. е. случай $y_1 < y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

11.5. В таблице $N \times N$ расставлены все натуральные числа от 1 до N^2. Число назовём *большим*, если оно наибольшее в своей строке, и *малым*, если оно наименьшее в своём столбце (таким образом, число может быть и большим, и малым одновременно, а может не быть ни тем, ни другим). Найдите наименьшую возможную разность между суммой всех больших чисел и суммой всех малых чисел. (*С. Токарев*)

Ответ. $\dfrac{N(N-1)(2N+5)}{6}$.

Решение. Заметим, что число N^2 большое, а 1 — малое, их разность равна $N^2 - 1$. Вычеркнем строку, содержащую N^2, и столбец, содержащий 1. Тогда, если A и B — наибольшее и наименьшее из оставшихся $(N-1)^2$ чисел, то $A - B \geqslant (N-1)^2 - 1$. При этом A не больше большого числа своей строки (в исходной таблице), а B — не меньше малого числа своего столбца, так что разность этих большого и малого числа также не меньше, чем $(N-1)^2 - 1$. Снова вычеркнем строку, содержащую A и столбец, содержащий B, и повторим рассуждения.

Продолжая так дальше, получим, что интересующая нас разность S не меньше, чем $N^2 - 1 + (N-1)^2 - 1 + \ldots + 1^2 - 1$. Используя формулу суммы квадратов первых N натуральных чисел, получим $S \geqslant N(N-1)(2N+5)/6$.

Осталось доказать, что оценка достигается. Построим соответствующий пример индукцией по N. База при $N = 1$ очевидна. Для перехода рассмотрим (уже построенный) пример таблицы $(N-1) \times (N-1)$ и увеличим все числа в нём на $N-1$ (получились числа от N до $N(N-1)$, а разность S не изменилась). Дополним эту таблицу новой строкой и новым столбцом; в новой строке расставим числа $N^2-N+1, N^2-N+2, \ldots, N^2$, а в оставшихся клетках нового столбца — числа $1, 2, \ldots, N-1$. Нетрудно видеть, что числа, бывшие большими и малыми в прежней таблице, такими и остались, и добавились большое число N^2 и малое число 1. Значит, S увеличилась на $N^2 - 1$, что и требовалось.

Комментарий. Доказано лишь, что $S \geqslant N(N-1)(2N+5)/6$ — 5 баллов.

Построен пример для $S = N(N-1)(2N+5)/6$ — 2 балла.

Ответ выражен через сумму квадратов — баллы не снимать.