Материалы для проведения регионального этапа

XLVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2019–2020 учебный год

Второй день

3–4 февраля 2020 г.

Москва, 2019

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, Л. А. Емельянов, Р. Г. Женодаров, П. Ю. Козлов, П. А. Кожевников, Д. Н. Крачун, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, В. С. Кулишов, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, О. С. Смирнов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, Е. О. Холмогоров, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **3 февраля 2020 г.** (I тур) и **4 февраля 2020 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2019–2020 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 3 февраля 2020 г., по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. Петя и Миша стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Миши на 2% больше скорости Пети. Петя всё время бежит против часовой стрелки, а Миша может менять направление бега в любой момент, непосредственно перед которым он пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Миша может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним. (*И. Рубанов*)

Решение. Пусть Миша, пробежав полкруга, развернётся и побежит назад. Пока он пробежит полкруга обратно, он встретит Петю. Когда Миша добежит до точки старта, Петя ещё не добежит до неё. Значит, если Миша продолжит бежать в том же направлении, он встретит Петю в какой-то точке на расстоянии d от старта. Пусть он пробежит ещё положительное расстояние ε, меньше $0{,}01d$, а затем развернётся (он может это сделать). Тогда, пока Петя преодолевает оставшееся расстояние d, Вася пробежит $1{,}02d > \varepsilon + (d + \varepsilon)$. Значит, он уже минует точку старта, а значит, перед этим он поравняется с Петей в третий раз.

Комментарий. Любое верное описание действий Миши (возможно, включающее слова типа «достаточно малое расстояние» и т. п.) — 7 баллов.

9.7. Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт и после этого немедленно зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов (зелёных и коричневых) каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа 1, 2, 3, ..., 2019 (в некотором порядке, причём не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально? (*Р. Женодаров, О. Дмитриев*)

Ответ. 1010.

Решение. Рассмотрим двух хамелеонов, говоривших подряд. Один из них в момент высказывания был коричневым;

действительно, если бы они оба были зелёными, то после высказывания первого количество зелёных хамелеонов не изменилось бы, и второй назвал бы то же число, что и первый. Разобьём всех хамелеонов на 1009 пар, говоривших подряд, и ещё одного хамелеона; поскольку в каждой паре был коричневый, исходное количество зелёных хамелеонов было не больше $2019 - 1009 = 1010$.

Осталось показать, что 1010 зелёных хамелеонов быть могло. Пронумеруем хамелеонов в порядке их высказываний. Пусть все нечётные хамелеоны — зелёные, а все чётные — коричневые. Тогда первый скажет 1010, второй — 1 и станет зелёным. Тогда третий скажет 1011, а четвёртый — 2 и станет зелёным, и так далее. В результате нечётные хамелеоны произнесут все числа от 1010 до 2019, а чётные — все числа от 1 до 1009.

Замечание. Из первого абзаца решения можно вывести, что в любом оптимальном примере коричневыми должны являться в точности хамелеоны с чётными номерами.

Комментарий. Только доказательство, что зелёных хамелеонов было не больше 1010 — 4 балла.

Только пример, показывающий, что изначально могло быть ровно 1010 зелёных хамелеонов — 3 балла.

9.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Окружность, описанная около треугольника ABL, пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что точка S, симметричная точке C относительно прямой DL, лежит на стороне AB и не совпадает с её концами. Какие значения может принимать $\angle ABC$? (*Б. Обухов, жюри*)

Ответ. 60°.

Первое решение. Из симметрии треугольники CLD и SLD равны, поэтому $DS = DC$, $\angle CDL = \angle SDL$ и $\angle DLC = \angle DLS$. Поскольку четырёхугольник $ALDB$ вписан в окружность, имеем $\angle BAL = \angle LDC$ (см. рис. 1). На хорды AL и DL этой окружности опираются равные углы, поэтому $AL = DL$.

Отложим на луче AB отрезок $AS' = DS = DC$. Тогда треугольники $S'LA$ и SLD равны по двум сторонам ($AS' = DS$, $AL = DL$) и углу между ними. Значит, $LS' = LS$ и $\angle AS'L = \angle DSL$. Если точки S' и S не совпадают, то в равнобедренном треугольнике LSS' углы при основании SS' равны, поэтому $\angle AS'L = \angle BSL$. Значит, $\angle DSL = \angle BSL$, то есть D лежит на AB; это невозможно.

Итак, $S' = S$, и $\angle ALS = \angle DLS = \angle DLC$. Сумма этих трёх углов равна 180°, поэтому они равны по 60°. Отсюда $\angle ABC = 180^\circ - \angle ALD = 60^\circ$.

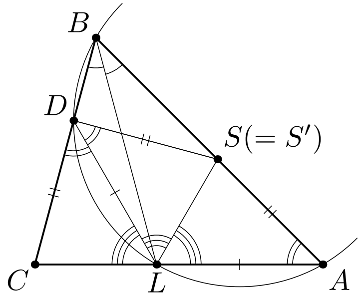

Рис. 1

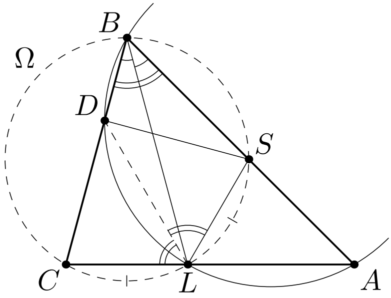

Рис. 2

Второе решение. Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника BCS (см. рис. 2). В этом треугольнике прямая BL является биссектрисой угла B, а прямая LD — серединным перпендикуляром к стороне CS. Эти прямые различны; обе они проходят через середину дуги CS окружности Ω, не содержащей B. Значит, их точка пересечения L и есть эта середина дуги, то есть $L \in \Omega$.

Поскольку четырёхугольник $ALDB$ вписан, имеем $\angle ABC = \angle DLC = \beta$. Из симметрии, $\angle DLC = \angle DLS = \beta$. Теперь из окружности Ω получаем $180^\circ = \angle CBS + \angle SLC = \beta + \angle DLS + \angle DLC = 3\beta$, откуда $\beta = 60^\circ$.

Замечание. Существуют и другие решения. Можно, например, заметить, что точка L является центром вневписанной окружности треугольника BDS (поскольку BL — биссектриса внутреннего угла этого треугольника, а DL — биссектриса его внешнего угла). Это приводит к вычислению $\angle ABC = \angle DLC = \angle DLS = 90^\circ - \angle ABC/2$, откуда следует ответ.

Можно также рассмотреть точку T, симметричную точке C относительно LB, а также проекции S' и T' точки C на LD и LB соответственно. Из вписанности четырёхугольников $ABDL$ и $LT'S'C$ имеем $\angle ABC = \angle DLC = \angle S'T'C =$

$= \angle STC = \angle BTC$. Но треугольник BTC — равнобедренный, поэтому $\angle BTC = 90^\circ - \angle ABC/2$.

Комментарий. Без дополнительных соображений утверждается, что треугольники ALS и DLS равны (по двум сторонам и углу $\angle LAS = \angle LDS$ **не** между ними) — не более 3 баллов за задачу.

9.9. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший? (*И. Богданов*)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Докажем следующую несложную лемму.

Лемма. *Если n-угольник разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники, количество которых равно t, то $n = td + 2$.*

Доказательство. Индукция по t; база при $t = 1$ очевидна.

Сделаем шаг индукции. Предполагая, что утверждение верно для количеств $(d+2)$-угольников, равных $1, 2, \ldots, t-1$, рассмотрим разрезание n-угольника P на t таких многоугольников. Возьмём в разрезании любую диагональ. Она делит наш n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2, один из которых разрезан на s, а другой — на r многоугольников, где $s + r = t$, причём $s < t$, $r < t$. По предположению индукции в многоугольниках P_1 и P_2 соответственно $sd + 2$ и $rd + 2$ сторон, а значит (поскольку P_1 и P_2 склеены по стороне), в многоугольнике P всего $(sd + 2) + (rd + 2) - 2 = (s + r)d + 2 = td + 2$ сторон. $\square$

Перейдём к задаче. Предположим противное: пусть некоторый правильный многоугольник Q разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники ($d \geqslant 3$ — нечётно), среди которых есть хороший $(d + 2)$-угольник $A_0A_1 \ldots A_{d+1}$ — пусть, скажем, сторона $A_{d+1}A_0$ параллельна некоторой другой стороне A_kA_{k+1}, где $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$.

Опишем вокруг Q окружность. В силу параллельности $A_{d+1}A_0 \parallel A_kA_{k+1}$, меньшие дуги A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ равны.

Пусть на меньшей дуге A_0A_1 расположены (в порядке следования от A_0 к A_1) m вершин многоугольника Q, назовем их $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Возможно, что $m = 0$. Если $m > 0$, вырежем из многоугольника Q многоугольник $A_0B_1B_2\ldots B_mA_1$. Видим, что этот $(m+2)$-угольник оказывается разбитым непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники. Согласно лемме, m делится на d (это верно и при $m = 0$).

Аналогично доказываем, что внутри каждой из дуг (не считая концов дуг) A_1A_2, …, $A_{k-1}A_k$ количество вершин многоугольника Q кратно d. Тогда количество вершин многоугольника Q внутри (меньшей) дуги A_0A_k (не считая самих концов дуг A_0 и A_k) равно $td+k-1$ для некоторого целого t. Аналогичный подсчёт количества вершин многоугольника Q, лежащих внутри (меньшей) дуги $A_{k+1}A_{d+1}$, даёт $sd+d-k-1$. Приравнивая, получаем $td+k-1 = sd+d-k-1$, откуда $2k$ делится на d. В силу нечётности d получаем, что k делится на d; это противоречит условию $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$.

Замечание. В приведённом решении противоречие получается из подсчёта числа вершин на равных дугах A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ и приравнивании этих количеств.

У этого рассуждения есть вариации; например, можно осуществить двойной подсчёт суммы углов в (равных) многоугольниках, отсекаемых от Q отрезками A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$.

Комментарий. Только сформулирована и доказана лемма или эквивалентное утверждение — 0 баллов.

Имеется продвижение в виде идеи приравнять количества вершин на равных дугах A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ или приравнять суммы углов в (равных) многоугольниках, отсекаемых от Q отрезками A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ — 1 балл.

Во в целом верном решении отсутствует или неверно доказательство леммы из решения выше (но формулировка её присутствует) — снимается 1 балл.

9.10. Докажите, что для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_9$ верно неравенство

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2} + \frac{x_2 - x_4}{x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_3^2} + \ldots +$$

$$+\frac{x_8-x_1}{x_8x_1+2x_9x_1+x_9^2}+\frac{x_9-x_2}{x_9x_2+2x_1x_2+x_1^2}\geqslant 0.$$

(*П. Бибиков*)

Решение. Продолжим нумерацию циклически: будем считать, что $x_{i+9}=x_i$.

Зафиксируем индекс i и обозначим для простоты $a=x_i$, $b=x_{i+1}$, $c=x_{i+2}$. Заметим, что при $a\geqslant c$ выполнено неравенство

$$ac+2bc+b^2\leqslant ac+ab+bc+b^2=(a+b)(b+c),$$

а при $a\leqslant c$ — неравенство

$$ac+2bc+b^2\geqslant ac+ab+bc+b^2=(a+b)(b+c).$$

Значит, в любом случае имеем

$$\frac{a-c}{ac+2bc+b^2}\geqslant\frac{a-c}{(a+b)(b+c)}=\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b},$$

то есть

$$\frac{x_i-x_{i+2}}{x_ix_{i+2}+2x_{i+1}x_{i+2}+x_{i+1}^2}\geqslant\frac{1}{x_{i+1}+x_{i+2}}-\frac{1}{x_i+x_{i+1}}.$$

Складывая такие неравенства при всех $i=1,2,\ldots,9$, получаем требуемое.

10 класс

10.6. На доске написано выражение $\cos x$. Разрешается сложить или перемножить несколько написанных на доске выражений (одно выражение может использоваться несколько раз) и дописать полученное новое выражение на доску. Можно ли за несколько действий получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Да, можно.

Решение. Первым действием дописываем $\cos^2 x$, вторым — $\cos^2 x + \cos x$. Поскольку $\cos \pi = -1$, значение последнего выражения при $x = \pi$ равно 0.

Комментарий. Ответ без предъявления искомого выражения — 0 баллов.

Только предъявление любого верного искомого выражения без указания поледовательности шагов, которая к нему приводит — 6 баллов.

10.7. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены прямоугольники. Оказалось, что все вершины этих прямоугольников, отличные от точек A, B, C, D, лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть $ABXY$ — один из данных прямоугольников, а O — центр окружности, на которой лежат восемь вершин из условия задачи (см. рис. 3). Тогда O лежит на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку XY. Но ℓ совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку AB. Поскольку O лежит на ℓ, имеем $OA = OB$.

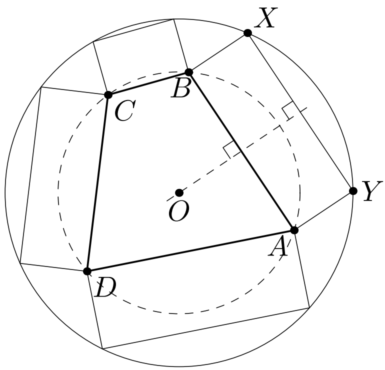

Рис. 3

Аналогично доказываем, что $OB = OC$ и $OC = OD$. Тогда O равноудалена от всех вершин четырехугольника $ABCD$, значит, $ABCD$ вписан в окружность с центром O, что и требовалось доказать.

Комментарий. Утверждается, но не доказано, что искомая и данная окружности концентрические — 1 балл.

10.8. На доске пишут n квадратных трёхчленов вида $*x^2 + *x + *$ (вместо коэффициентов написаны звёздочки). Можно ли при каком-либо $n > 100$ поставить вместо $3n$ звёздочек некоторые $3n$ последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы каждый из n данных трёхчленов имел два различных целых корня? (*О. Южаков*)

Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Решение будет состоять из трёх шагов (A, B, C).

A) Докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть при некоторых натуральных a, b, c квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет целые корни. Тогда b и c делятся на a.*

Доказательство. По теореме Виета $b/a = -(x_1 + x_2)$ и $c/a = x_1x_2$ являются целыми числами. Лемма доказана.

B) Предположим, что натуральные числа $k + 1$, $k + 2$, $\ldots$, $k+3n$ (при некотором целом неотрицательном k) нужным образом расставлены в качестве коэффициентов данных квадратных трёхчленов $a_ix^2 + b_ix + c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Для определённости пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тогда $a_1 \geqslant k + 1$, откуда $a_2 \geqslant k + 2$, и т.д., $a_n \geqslant k + n$. Тогда из леммы следует, что минимальное из чисел b_n, c_n не меньше, чем $2a_n$, а максимальное (назовём его M) — не меньше, чем $3a_n$. Но M должно быть среди чисел $k + 1, k + 2, \ldots, k + 3n$. Получаем $3(k + n) \leqslant 3a_n \leqslant M \leqslant k + 3n$. Отсюда $k \leqslant 0$, и, значит, $k = 0$. Кроме того, $a_n = n$, откуда сразу следует, что $a_i = i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

C) Среди $3n$ подряд идущих чисел менее $3n/2+1$ чётных. С другой стороны, зная, что a_i пробегают числа $\{1, 2, \ldots, n\}$, получим оценку снизу на количество C чётных чисел среди всех коэффициентов. Заметим, что в каждой из n троек (a_i, b_i, c_i) хотя бы одно чётное число, иначе значение трёхчлена $a_ix^2+b_ix+c_i$ в любой целой точке будет нечётно, в частности, такой трёхчлен не может иметь целых корней. Если же a_i чётно (количество соответствующих троек (a_i, b_i, c_i) равно $[n/2]$), то b_i и c_i, в силу леммы, тоже чётные, значит, в такой тройке (a_i, b_i, c_i) все три коэффициента чётные. Итого $C \geqslant n + 2[n/2] \geqslant 2n - 1$. Сравнивая верхнюю и нижнюю оценки, имеем $3n/2 + 1 > C \geqslant 2n - 1$, откуда $n < 4$. Противоречие.

Комментарий. Только часть А (сформулирована и доказана лемма о делимости коэффициентов) — 1 балл.

Сделаны части А и В (т. е. в предположении, что ответ «можно», доказано, что каждый старший коэффициент не превышает n) — 4 балла.

Из оставшихся 3 баллов начисляются продвижения в части С (получение противоречия в случае, когда старшие коэффициенты равны 1, 2, ..., n). Если часть С доказана с ссылкой на недоказанный факт о наличии простых чисел среди чисел от $n+1$ до $3n$, из возможных 3 баллов начисляется 1 балл.

Если в решении лемма используется без доказательства — снимается 1 балл.

10.9. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший? (*И. Богданов*)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Докажем следующую несложную лемму.

Лемма. *Если n-угольник разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники, количество которых равно t, то $n = td + 2$.*

Доказательство. Индукция по t; база при $t = 1$ очевидна.

Сделаем шаг индукции. Предполагая, что утверждение верно для количеств $(d+2)$-угольников, равных $1, 2, \ldots, t-1$, рассмотрим разрезание n-угольника P на t таких многоугольников. Возьмём в разрезании любую диагональ. Она делит наш n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2, один из которых разрезан на s, а другой — на r многоугольников, где $s + r = t$, причём $s < t$, $r < t$. По предположению индукции в многоугольниках P_1 и P_2 соответственно $sd + 2$ и $rd + 2$ сторон, а значит (поскольку P_1 и P_2 склеены по стороне), в многоугольнике P всего $(sd+2)+(rd+2)-2=(s+r)d+2=td+2$ сторон. $\square$

Перейдём к задаче. Предположим противное: пусть некоторый правильный многоугольник Q разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники ($d \geqslant 3$ — нечётно), среди которых есть хороший $(d+2)$-угольник $A_0A_1\ldots A_{d+1}$ — пусть, скажем, сторона $A_{d+1}A_0$ параллельна некоторой другой стороне A_kA_{k+1}, где $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$.

Опишем вокруг Q окружность. В силу параллельности $A_{d+1}A_0 \parallel A_kA_{k+1}$, меньшие дуги A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ равны.

Пусть на меньшей дуге A_0A_1 расположены (в порядке следования от A_0 к A_1) m вершин многоугольника Q, назовем их $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Возможно, что $m=0$. Если $m>0$, вырежем из многоугольника Q многоугольник $A_0B_1B_2\ldots B_mA_1$. Видим, что этот $(m+2)$-угольник оказывается разбитым непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники. Согласно лемме, m делится на d (это верно и при $m=0$).

Аналогично доказываем, что внутри каждой из дуг (не считая концов дуг) A_1A_2, …, $A_{k-1}A_k$ количество вершин многоугольника Q кратно d. Тогда количество вершин многоугольника Q внутри (меньшей) дуги A_0A_k (не считая самих концов дуг A_0 и A_k) равно $td+k-1$ для некоторого целого t. Аналогичный подсчёт количества вершин многоугольника Q, лежащих внутри (меньшей) дуги $A_{k+1}A_{d+1}$, даёт $sd+d-k-1$. Приравнивая, получаем $td+k-1=sd+d-k-1$, откуда $2k$ делится на d. В силу нечётности d получаем, что k делится на d; это противоречит условию $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$.

Замечание. В приведённом решении противоречие получается из подсчёта числа вершин на равных дугах A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ и приравнивании этих количеств.

У этого рассуждения есть вариации; например, можно осуществить двойной подсчёт суммы углов в (равных) многоугольниках, отсекаемых от Q отрезками A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$.

Комментарий. Только сформулирована и доказана лемма или эквивалентное утверждение — 0 баллов.

Имеется продвижение в виде идеи приравнять количества вершин на равных дугах A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ или приравнять суммы углов в (равных) многоугольниках, отсекаемых от Q отрезками A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ — 1 балл.

Во в целом верном решении отсутствует или неверно доказательство леммы из решения выше (но формулировка её присутствует) — снимается 1 балл.

10.10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

(*М. Антипов*)

Ответ. При $n = 8$.

Решение. Мы будем называть многочлен вида $ax^2 + bx + c$ просто *многочленом*, а график такого многочлена — просто *графиком*. Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Через любые три точки* (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ *с разными абсциссами проходит ровно один график.*

Доказательство. Один график, проходящий через эти точки, найдётся всегда — нетрудно проверить, что подходит многочлен

$$b_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + b_2 \frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + b_3 \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

С другой стороны, если через три точки проходят графики двух разных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то разность $f(x) - g(x)$ имеет три корня a_1, a_2, a_3, что невозможно. □

Из леммы следует, что через любые *две* точки с разными абсциссами проходит бесконечно много графиков, и любые два из них пересекаются только по этим двум точкам.

Перейдём к решению. Будем считать, что Петя задумал два графика, за ход Вася называет Пете число t, а Петя отмечает точку с абсциссой t на одном из графиков. Можно считать, что на разных ходах Вася называет разные t (иначе Петя повторит ответ).

Рассмотрим ситуацию после k ходов. Назовём пару графиков *подходящей*, если объединение этих графиков содержит все отмеченные Петей точки.

1) Покажем, что $k \geqslant 8$. Мы будем считать, что Петя изначально не рисует никаких графиков, а просто отмечает некоторые точки с данными абсциссами. Покажем, как ему действовать, чтобы после 7 ходов нашлись две подходящих пары графиков такие, что все 4 графика различны; это и будет означать, что Вася не смог добиться требуемого, ибо Петя мог нарисовать любую из этих пар.

Будем обозначать точку, появляющуюся после i-го хода, через $A_i = (a_i, b_i)$. На первых двух ходах Петя выбирает $b_1 = b_2 = 0$. На следующих 4 ходах Петя отметит точки A_3 и A_4 на графике F_+ многочлена $f_+(x) = (x - a_1)(x - a_2)$ и точки A_5 и A_6 — на графике F_- многочлена $f_-(x) = -(x - a_1)(x - a_2)$.

Седьмым ходом Петя выбирает точку A_7, не лежащую ни на одном из графиков, проходящем через какие-то три точки из A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6. Тогда существуют графики G_+ и G_-, проходящие через тройки точек A_5, A_6, A_7 и A_3, A_4, A_7; согласно нашему выбору, эти графики различны и отличаются от F_+ и F_-. Значит, пары (F_+, G_+) и (F_-, G_-) — подходящие, и все эти четыре графика различны, то есть Вася не сможет добиться требуемого.

2) Покажем, как Васе добиться требуемого за 8 ходов. На первых 7 ходах он называет 7 произвольных различных чисел. Назовём график *подозрительным*, если он проходит хотя бы через три точки, отмеченных Петей на этих ходах. Назовём число *a плохим*, если два различных подозрительных графика имеют общую точку с абсциссой a. Существует лишь конечное количество подозрительных графиков и, следовательно, лишь конечное количество плохих чисел.

На восьмом ходу Вася называет любое неплохое число a_8. После того, как Петя отметит восьмую точку, возможны два случая.

Случай 1. Существует график G многочлена $f(x)$, содержащий пять из восьми отмеченных точек. Три из этих точек лежат на одном из петиных графиков; по лемме, этот график совпадает с G. Значит, Васе достаточно назвать многочлен $f(x)$.

Случай 2. Такого графика нет. Это значит, что на каждом из петиных графиков лежит ровно по 4 отмеченных точки; поэтому оба этих графика подозрительны. Докажем, что существует единственная пара подозрительных графиков, содержащих в совокупности все 8 отмеченных точек; тогда Васе достаточно назвать любой из соответствующих многочленов.

Пусть (G_1, H_1) и (G_2, H_2) — две таких пары, причём H_1 и H_2 содержат A_8. Согласно выбору числа a_8, это может произойти лишь при $H_1 = H_2$. Но тогда каждый из графиков G_1 и G_2 проходит через 4 отмеченных точки, не лежащих на H_1, и они совпадают согласно лемме. Значит, и наши пары совпадают.

Замечание 1. Если Петя за первые 6 ходов не отметит 4 точек, лежащих на одном графике, то Вася сможет найти один из многочленов седьмым ходом, действуя аналогично описанному выше.

Замечание 2. При описанной стратегии Васи *может* случиться, что существуют две различных пары подозрительных пары, каждая из которых содержит в объединении все 8 отмеченных точек. Например, если точки $A_3, A_4, \ldots, A_8$ лежат на одном графике F, а тройки точек (A_1, A_2, A_3) и (A_1, A_2, A_4) задают графики G_1 и G_2, то пары (F, G_1) и (F, G_2) — подходят.

Комментарий. Лемма из решения выше считается известной; за отсутствие её доказательства баллы не снимаются, а за наличие доказательства — не начисляются.

Только ответ — 0 баллов.

Любое полное решение состоит из двух частей; баллы, полученные за разные части, складываются.

Часть 1: доказательство того, что за 7 вопросов Вася не сумеет добиться требуемого (максимум 4 балла).

Полное доказательство — 4 балла.

Доказано только, что Вася не сможет добиться требуемого за 6 ходов — 1 балл (не суммируется с баллами за другие продвижения в этой части).

Часть 2: доказательство того, что за 8 ходов Вася сумеет добиться требуемого (максимум 3 балла).

Полное доказательство — 3 балла.

Приведён алгоритм, позволяющий Васе добиться требуемого, но обоснование его отсутствует или неверно — 1 балл.

Верного алгоритма нет, но присутствует идея выбора последнего называемого Васей числа a_k так, чтобы никакие два подозрительных графика не пересекались в точке с абсциссой a_k — 1 балл (не суммируется с предыдущим).

Если обоснование верного алгоритма работает в одном из случаев, разобранных выше, но упускает другой случай (или неверно в этом случае) — снимается 1 балл.

Нетрудно доказать, что Вася сумеет добиться требуемого за 9 ходов (поскольку две пары графиков имеют лишь 8 общих точек). Если в Части 2 доказано лишь это — ставится 1 балл. Этот балл не суммируется с другими продвижении в этой части.

11 класс

11.6. На доске написаны функции: $x+1$, x^2+1, x^3+1, x^4+1. Разрешается дописывать на доску новые функции, получаемые из написанных на доске с помощью операций вычитания и умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента — неположительные значения. (*Н. Агаханов*)

Решение. Например, подходит $(x^4+1)(x+1)-(x^4+1) = x(x^4+1)$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов.

11.7. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не являлась степенью двойки? (*Д. Храмцов*)

Ответ. Можно.

Первое решение. Покрасим числа $2^s(4k+1)$, где $s, k = 0, 1, \ldots$, в первый цвет, а $2^s(4k+3)$, $(s, k = 0, 1, \ldots)$ — во второй. Покажем, что никакие два числа первого цвета не дают в сумме степень двойки; рассуждения для чисел второго цвета аналогичны.

Пусть наши два числа — это $2^s(4k+1)$ и $2^t(4\ell+1)$, где $s \geqslant t$. Если $s > t$, то сумма $2^s(4k+1)+2^t(4\ell+1) = 2^t(2^{s-t}(4k+1)+4\ell+1)$ содержит нечётный множитель $2^{s-t}(4k+1)+4\ell+1 \geqslant 3$, поэтому она не может быть степенью двойки. Если же $s = t$, то $k \neq \ell$, и сумма $2^s(4k+1)+2^s(4\ell+1) = 2^{s+1}(2(k+\ell)+1)$ тоже содержит нечётный множитель $2(k+\ell)+1 \geqslant 3$ и не может быть степенью двойки.

Второе решение. Назовём раскраску всех натуральных чисел в два цвета *правильной*, если никакие два числа одного цвета не дают в сумме степень двойки. Раскрасим правильно все натуральные числа в два цвета, пользуясь следующим «жадным алгоритмом»: сначала покрасим 1 в первый цвет. Далее, пусть все натуральные числа от 1 до n уже покрашены правильно в два цвета. Рассмотрим число $n+1$. Предположим, найдутся два различных натуральных числа $x < y \leqslant n$

такие, что $x + n + 1 = 2^a$, $y + n + 1 = 2^b$, $a < b$. Тогда $y+n+1 = 2^b \geqslant 2^{a+1} = 2(x+n+1)$, откуда $n+1 \leqslant y-2x < n$, что невозможно. Следовательно, существует не более одного числа, меньшего $n+1$ и дающего в сумме с ним степень двойки. Окрасив $n+1$ в цвет, противоположный цвету этого числа, если оно есть, или в первый цвет, если его нет, получим правильную раскраску всех натуральных чисел от 1 до $n+1$. Продолжая этот процесс, получим правильную раскраску всех натуральных чисел в два цвета.

Замечание. Несложно доказать, что полученная ракраска совпадает с раскраской из первого решения. Но, разумеется, это не единственная раскраска такого рода.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Верная раскраска предъявлена, но не обоснована — 4 балла.

11.8. Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$ — положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n, что $m \sin x + n \cos x$ — натуральное число. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть $\sin x + \cos y = a$ и $\sin y + \cos x = b$. Тогда $\cos y = a - \sin x$ и $\sin y = b - \cos x$. Возведём эти равенства в квадрат и сложим их. Тогда в силу основного тригонометрического тождества получим: $1 = a^2 + b^2 - 2a \sin x - 2b \cos x + 1$, то есть $2a \sin x + 2b \cos x = a^2 + b^2$. Пусть N — НОК знаменателей чисел a и b; тогда, умножив полученное равенство на N^2, получим требуемое.

Комментарий. Вместо натуральных чисел найдены положительные рациональные — 5 баллов.

11.9. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Обозначим данные сферы через Ω_1, Ω_2 и Ω_3 так, чтобы они касались плоскости α в точках D, E и F соответственно. Пусть C — точка касания сфер Ω_1 и Ω_2. Обозначим через β плоскость, перпендикулярную α и содержащую прямую DE. Тогда центры сфер Ω_1 и Ω_2 и точка C лежат в плоскости β.

Пусть эта плоскость пересекает сферы Ω_1 и Ω_2 по окружностям ω_1 и ω_2 (см. рис. 4). Тогда прямая DE — общая внешняя касательная к этим двум окружностям, а они сами касаются в точке C. Пусть общая касательная к ним в точке C пересекает отрезок DE в точке M. Тогда $MD = MC = ME$.

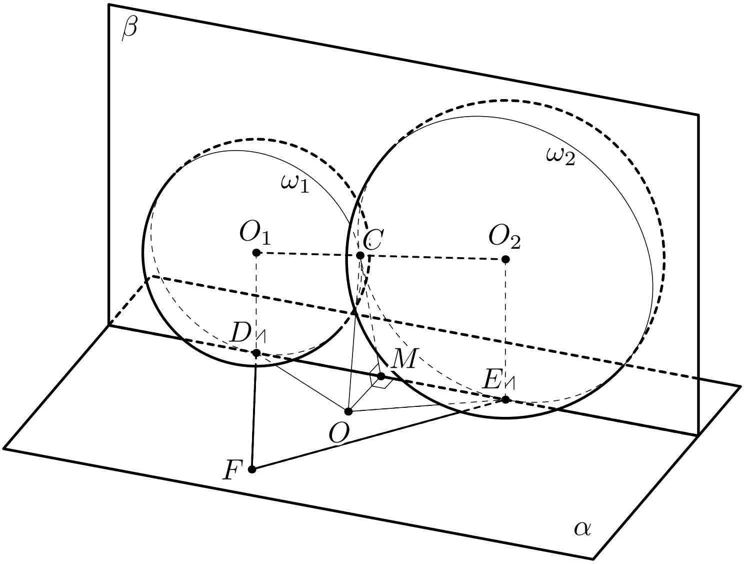

Рис. 4

Обозначим через O центр описанной окружности треугольника DEF, а через R — её радиус. Пусть $O \neq M$. Точка M — середина отрезка DE, поэтому $\angle OME = 90°$. Поскольку $\alpha \perp \beta$, то $\angle OMC = 90°$. Значит, прямоугольные треугольники OMC и OME равны по двум катетам, поэтому $OC = OE = R$. В случае $O = M$ также имеем $OC = R$.

Таким образом, на сфере Ω с центром в точке O и радиусом R лежит точка C. Аналогично, на этой сфере лежат точки A и B. Следовательно, описанная окружность треугольника ABC также лежит на сфере Ω, поэтому её радиус не превосходит R.

Наконец, точки A, B, C лежат в одном полупространстве относительно плоскости α, поэтому точка O не лежит в плоскости ABC. Это означает, что верно строгое неравенство.

Замечание. Конструкция со сферой является обобщением плоского факта. Если две окружности касаются внешним образом в точке X, а общая внешняя касательная касается их в точках Y и Z, то окружность, построенная на отрезке YZ как на диаметре, проходит через точку X. Отметим, что эта конструкция возникает в плоскости β.

Второе решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры сфер Ω_1, Ω_2, Ω_3 соответственно, причём A, B, C — точки касания сфер Ω_2 и Ω_3, Ω_3 и Ω_1, Ω_1 и Ω_2 соответственно. Точки A, B, C лежат на отрезках O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 соответственно, причём $O_1B = O_1C$, $O_2C = O_2A$, $O_3A = O_3B$. Тогда эти точки являются точками касания окружности γ, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$, с его сторонами. Заметим, что γ и является описанной окружностью треугольника ABC (см. рис. 5).

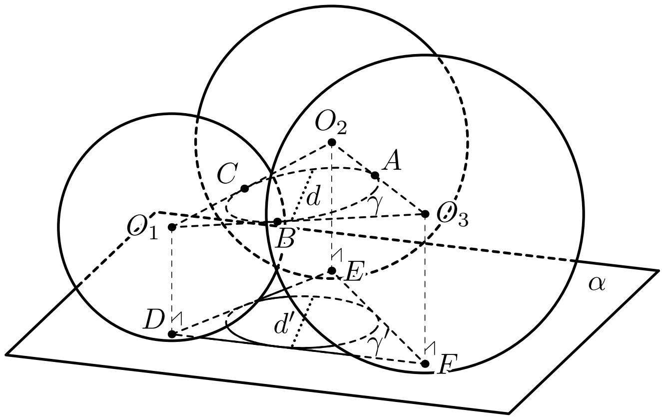

Рис. 5

Заметим, что точки D, E, F — это проекции точек O_1, O_2, O_3 на плоскость α. При этой проекции окружность γ переходит в кривую, лежащую внутри треугольника DEF.

Пусть d — диаметр γ, параллельный плоскости α; тогда при проекции он переходит в отрезок d' той же длины, лежащий в треугольнике DEF (и тем более — внутри его описанной окружности ω). Из этого следует, что диаметр ω больше, чем d, что и требовалось доказать.

Комментарий. Доказано нестрогое неравенство вместо строгого — снимаются 2 балла.

11.10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

(*М. Антипов*)

Ответ. При $n = 8$.

Решение. Мы будем называть многочлен вида $ax^2 + bx + c$ просто *многочленом*, а график такого многочлена — просто *графиком.* Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Через любые три точки* (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ *с разными абсциссами проходит ровно один график.*

Доказательство. Один график, проходящий через эти точки, найдётся всегда — нетрудно проверить, что подходит многочлен

$$b_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + b_2 \frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + b_3 \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

С другой стороны, если через три точки проходят графики двух разных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то разность $f(x) - g(x)$ имеет три корня a_1, a_2, a_3, что невозможно. □

Из леммы следует, что через любые *две* точки с разными абсциссами проходит бесконечно много графиков, и любые два из них пересекаются только по этим двум точкам.

Перейдём к решению. Будем считать, что Петя задумал два графика, за ход Вася называет Пете число t, а Петя отмечает точку с абсциссой t на одном из графиков. Можно считать, что на разных ходах Вася называет разные t (иначе Петя повторит ответ).

Рассмотрим ситуацию после k ходов. Назовём пару графиков *подходящей*, если объединение этих графиков содержит все отмеченные Петей точки.

1) Покажем, что $k \geqslant 8$. Мы будем считать, что Петя изна-

чально не рисует никаких графиков, а просто отмечает некоторые точки с данными абсциссами. Покажем, как ему действовать, чтобы после 7 ходов нашлись две подходящих пары графиков такие, что все 4 графика различны; это и будет означать, что Вася не смог добиться требуемого, ибо Петя мог нарисовать любую из этих пар.

Будем обозначать точку, появляющуюся после i-го хода, через $A_i = (a_i, b_i)$. На первых двух ходах Петя выбирает $b_1 = b_2 = 0$. На следующих 4 ходах Петя отметит точки A_3 и A_4 на графике F_+ многочлена $f_+(x) = (x - a_1)(x - a_2)$ и точки A_5 и A_6 — на графике F_- многочлена $f_-(x) = -(x - a_1)(x - a_2)$.

Седьмым ходом Петя выбирает точку A_7, не лежащую ни на одном из графиков, проходящем через какие-то три точки из A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6. Тогда существуют графики G_+ и G_-, проходящие через тройки точек A_5, A_6, A_7 и A_3, A_4, A_7; согласно нашему выбору, эти графики различны и отличаются от F_+ и F_-. Значит, пары (F_+, G_+) и (F_-, G_-) — подходящие, и все эти четыре графика различны, то есть Вася не сможет добиться требуемого.

2) Покажем, как Васе добиться требуемого за 8 ходов. На первых 7 ходах он называет 7 произвольных различных чисел. Назовём график *подозрительным*, если он проходит хотя бы через три точки, отмеченных Петей на этих ходах. Назовём число *a плохим*, если два различных подозрительных графика имеют общую точку с абсциссой a. Существует лишь конечное количество подозрительных графиков и, следовательно, лишь конечное количество плохих чисел.

На восьмом ходу Вася называет любое неплохое число a_8. После того, как Петя отметит восьмую точку, возможны два случая.

Случай 1. Существует график G многочлена $f(x)$, содержащий пять из восьми отмеченных точек. Три из этих точек лежат на одном из петиных графиков; по лемме, этот график совпадает с G. Значит, Васе достаточно назвать многочлен $f(x)$.

Случай 2. Такого графика нет. Это значит, что на каждом из петиных графиков лежит ровно по 4 отмеченных точки; поэтому оба этих графика подозрительны. Докажем, что существует единственная пара подозрительных графиков, содержащих в совокупности все 8 отмеченных точек; тогда Васе достаточно назвать любой из соответствующих многочленов.

Пусть (G_1, H_1) и (G_2, H_2) — две таких пары, причём H_1 и H_2 содержат A_8. Согласно выбору числа a_8, это может произойти лишь при $H_1 = H_2$. Но тогда каждый из графиков G_1 и G_2 проходит через 4 отмеченных точки, не лежащих на H_1, и они совпадают согласно лемме. Значит, и наши пары совпадают.

Замечание 1. Если Петя за первые 6 ходов не отметит 4 точек, лежащих на одном графике, то Вася сможет найти один из многочленов седьмым ходом, действуя аналогично описанному выше.

Замечание 2. При описанной стратегии Васи *может* случиться, что существуют две различных пары подозрительных пары, каждая из которых содержит в объединении все 8 отмеченных точек. Например, если точки $A_3, A_4, \ldots, A_8$ лежат на одном графике F, а тройки точек (A_1, A_2, A_3) и (A_1, A_2, A_4) задают графики G_1 и G_2, то пары (F, G_1) и (F, G_2) — подходят.

Комментарий. Лемма из решения выше считается известной; за отсутствие её доказательства баллы не снимаются, а за наличие доказательства — не начисляются.

Только ответ — 0 баллов.

Любое полное решение состоит из двух частей; баллы, полученные за разные части, складываются.

Часть 1: доказательство того, что за 7 вопросов Вася не сумеет добиться требуемого (максимум 4 балла).

Полное доказательство — 4 балла.

Доказано только, что Вася не сможет добиться требуемого за 6 ходов — 1 балл (не суммируется с баллами за другие продвижения в этой части).

Часть 2: доказательство того, что за 8 ходов Вася сумеет добиться требуемого (максимум 3 балла).

Полное доказательство — 3 балла.

Приведён алгоритм, позволяющий Васе добиться требуемого, но обоснование его отсутствует или неверно — 1 балл.

Верного алгоритма нет, но присутствует идея выбора последнего называемого Васей числа a_k так, чтобы никакие два подозрительных графика не пересекались в точке с абсциссой a_k — 1 балл (не суммируется с предыдущим).

Если обоснование верного алгоритма работает в одном из случаев, разобранных выше, но упускает другой случай (или неверно в этом случае) — снимается 1 балл.

Нетрудно доказать, что Вася сумеет добиться требуемого за 9 ходов (поскольку две пары графиков имеют лишь 8 общих точек). Если в Части 2 доказано лишь это — ставится 1 балл. Этот балл не суммируется с другими продвижении в этой части.