9 класс

Второй день

9.6. Петя и Миша стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Миши на 2% больше скорости Пети. Петя всё время бежит против часовой стрелки, а Миша может менять направление бега в любой момент, непосредственно перед которым он пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Миша может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним.

9.7. Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт и после этого немедленно зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов (зелёных и коричневых) каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа 1, 2, 3, ..., 2019 (в некотором порядке, причём не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально?

9.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Окружность, описанная около треугольника ABL, пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что точка S, симметричная точке C относительно прямой DL, лежит на стороне AB и не совпадает с её концами. Какие значения может принимать $\angle ABC$?

9.9. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший?

9.10. Докажите, что для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_9$ верно неравенство

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2} + \frac{x_2 - x_4}{x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_3^2} + \ldots + \frac{x_8 - x_1}{x_8x_1 + 2x_9x_1 + x_9^2} + \frac{x_9 - x_2}{x_9x_2 + 2x_1x_2 + x_1^2} \geqslant 0.$$

XLVI Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.6. Петя и Миша стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Миши на 2% больше скорости Пети. Петя всё время бежит против часовой стрелки, а Миша может менять направление бега в любой момент, непосредственно перед которым он пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Миша может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним.

9.7. Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт и после этого немедленно зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов (зелёных и коричневых) каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа 1, 2, 3, ..., 2019 (в некотором порядке, причём не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально?

9.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Окружность, описанная около треугольника ABL, пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что точка S, симметричная точке C относительно прямой DL, лежит на стороне AB и не совпадает с её концами. Какие значения может принимать $\angle ABC$?

9.9. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший?

9.10. Докажите, что для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_9$ верно неравенство

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2} + \frac{x_2 - x_4}{x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_3^2} + \ldots + \frac{x_8 - x_1}{x_8x_1 + 2x_9x_1 + x_9^2} + \frac{x_9 - x_2}{x_9x_2 + 2x_1x_2 + x_1^2} \geqslant 0.$$

10 класс

Второй день

10.6. На доске написано выражение $\cos x$. Разрешается сложить или перемножить несколько написанных на доске выражений (одно выражение может использоваться несколько раз) и дописать полученное новое выражение на доску. Можно ли за несколько действий получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0?

10.7. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены прямоугольники. Оказалось, что все вершины этих прямоугольников, отличные от точек A, B, C, D, лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

10.8. На доске пишут n квадратных трёхчленов вида $*x^2 + *x + *$ (вместо коэффициентов написаны звёздочки). Можно ли при каком-либо $n > 100$ поставить вместо $3n$ звёздочек некоторые $3n$ последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы каждый из n данных трёхчленов имел два различных целых корня?

10.9. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший?

10.10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

XLVI Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.6. На доске написано выражение $\cos x$. Разрешается сложить или перемножить несколько написанных на доске выражений (одно выражение может использоваться несколько раз) и дописать полученное новое выражение на доску. Можно ли за несколько действий получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0?

10.7. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены прямоугольники. Оказалось, что все вершины этих прямоугольников, отличные от точек A, B, C, D, лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

10.8. На доске пишут n квадратных трёхчленов вида $*x^2 + *x + *$ (вместо коэффициентов написаны звёздочки). Можно ли при каком-либо $n > 100$ поставить вместо $3n$ звёздочек некоторые $3n$ последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы каждый из n данных трёхчленов имел два различных целых корня?

10.9. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший?

10.10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

11 класс

Второй день

11.6. На доске написаны функции: $x+1$, x^2+1, x^3+1, x^4+1. Разрешается дописывать на доску новые функции, получаемые из написанных на доске с помощью операций вычитания и умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента — неположительные значения.

11.7. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не являлась степенью двойки?

11.8. Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$ — положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n, что $m \sin x + n \cos x$ — натуральное число.

11.9. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

11.10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

XLVI Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.6. На доске написаны функции: $x+1$, x^2+1, x^3+1, x^4+1. Разрешается дописывать на доску новые функции, получаемые из написанных на доске с помощью операций вычитания и умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента — неположительные значения.

11.7. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не являлась степенью двойки?

11.8. Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$ — положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n, что $m \sin x + n \cos x$ — натуральное число.

11.9. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

11.10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?