Материалы для проведения регионального этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

5 февраля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, Д. А. Демин, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. Т. Крымский, А. С. Кузнецов, С. А. Лучинин, А. К. Львов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **5 февраля 2021 г.** (I тур) и **6 февраля 2021 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2020–2021 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Ослик Иа-Иа составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и покрасил шесть палочек в два цвета: три самых коротких — в жёлтый цвет, а три остальных — в зелёный. Обязательно ли ослику удастся составить два треугольника, один — из трёх жёлтых палочек, а другой — из трёх зелёных? (*Л. Емельянов*)

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Если, например, у Иа-Иа были два равных треугольника со сторонами 1, 2, 2, то в первой кучке окажутся палочки с длинами 1, 1, 2, из которых треугольник составить нельзя.

Замечание. Существует много других примеров. Стоит отметить, что из трёх зелёных палочек треугольник сложить всегда можно — см. задачу 10.1.

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

Если третья и четвёртая по величине палочки равны, Иа-Иа может любую из них окрасить в жёлтый цвет; на возможность складывания треугольников это не влияет. Существуют примеры, в которых все палочки различны; но описанные верные примеры также должны оцениваться в 7 баллов.

9.2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Оно положительно.

Первое решение. Сложив неравенства из условия, получим, что $-x - y > 0$. Перемножив неравенства из условия (это можно делать, поскольку их правые части неотрицательны), получим, что $xy(1-x-y) > 0$. Выражение в скобках положительно, поэтому произведение xy также положительно.

Второе решение. Очевидно, что ни одно из чисел x и y не может равняться нулю. Предположим, что одно из них (для определенности x) положительно. Тогда из первого неравенства в условии получаем $x^2 > x^2 - x > y^2 \geqslant 0$ и, значит, $x > |y|$. Следовательно, по второму неравенству из условия $y^2 + x > y^2 + |y| \geqslant y^2 - y > x^2$, поэтому $y^2 > x^2 - x$, что противоречит первому неравенству. Таким образом, наше предположение неверно и среди чисел x и y нет положительных. А значит, они оба отрицательны и $xy > 0$.

Третье решение. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(t) = t^2 - t - y^2$. Его корни равны $t_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4y^2}) > 0$ и $t_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4y^2}) < 0$, причем $t_1 > \frac{\sqrt{1+4y^2}}{2} > |y|$. Предположим, что $x \geqslant 0$. Тогда $f(x) > 0$ и, значит, $x > t_1$. Следовательно,
$y^2 - y - x^2 < y^2 - y - t_1^2 = y^2 - y - (t_1 + y^2) = -t_1 - y < -|y| - y \leqslant 0.$
Но это противоречит второму неравенству из условия. Следовательно, $x < 0$. Аналогично доказывается, что $y < 0$ и, значит, $xy > 0$.

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

Доказано только, что $x + y < 0$ — 1 балл.

В условии уже указано, что числа x и y существуют. Поэтому, если доказано, что произведение xy положительно, то примера, подтверждающего возможность этой ситуации, приводить *не надо.* За отсутствие такого примера баллы не снижаются.

Ошибочные преобразования неравенств (возведение в квадрат или перемножение неравенств, знаки частей которых в решении не определены, и т. п.) — не более 1 балла за задачу.

Только за пример, показывающий, что оба числа могут быть отрицательными, баллы не начисляются.

9.3. Рассмотрим такие натуральные числа a, b и c, что дробь

$$k = \frac{ab + c^2}{a + b}$$

является натуральным числом, меньшим a и b. Какое наименьшее количество натуральных делителей может быть у числа $a + b$? (*П. Козлов*)

Ответ. Три делителя.

Первое решение. Поскольку число $a + b$ больше единицы, оно имеет хотя бы два различных делителя. Докажем, что их не может быть ровно два, т. е. что число $a+b$ не может быть простым. Домножив равенство из условия на знаменатель, получим $ab+c^2=ka+kb$ или, что то же самое, $ab-ka-kb+k^2=k^2-c^2$. Разложив обе части на множители, придем к соотношению

$$(a-k)(b-k)=(k-c)(k+c).$$

Поскольку $k<a$ и $k<b$, обе скобки в левой части положительны и, значит, $c<k$. Тогда существуют такие натуральные числа x, y, z и t, что

$$a-k=xy,\quad b-k=zt,\quad k-c=xz \quad \text{и} \quad k+c=yt. \qquad (*)$$

Например, можно положить $x=\text{НОД}(a-k,k-c)$, $t=\text{НОД}(b-k,k+c)$, $y=(a-k)/x$ и $z=(b-k)/t$. Тогда первые два равенства будут выполнены по определению; с другой стороны, $k-c$ делит xz, а $k+c$ делит yt, поэтому из равенства произведений вытекают написанные равенства.

Следовательно,

$$a+b=(a-k)+(b-k)+(k-c)+(k+c)= \\ =xy+zt+xz+yt=(x+t)(y+z).$$

Таким образом, число $a+b$ представляется в виде произведения двух натуральных чисел, больших 1, и, значит, не является простым.

Наконец, несложно увидеть, что $a+b$ может имеет ровно три различных делителя. Например, если $a=10$, $b=15$, $c=5$, то $k=\dfrac{10\cdot 15+5^2}{10+15}=7$, и $a+b=25=5^2$ имеет три делителя.

Замечание. Ни при каких a и b сумма $a+b$ не может равняться 2^2 и 3^2. Но для любого простого числа $p\geqslant 5$ существуют удовлетворяющие условию задачи числа a, b и c, что $a+b=p^2$. Для случая $a\leqslant b$ все подходящие a, b, c и k имеют вид $a=np$, $b=(p-n)p$, $c=mp$ и $k=np-n^2+m^2$, где $2\leqslant n\leqslant\dfrac{p-1}{2}$, $1\leqslant m\leqslant n-1$. В частности, для $p=5$ пример единственный с точностью до перестановки местами чисел a и b.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что число $p=a+b$ не может быть простым. Предположим противное.

Будем считать, что $a\leqslant b$. Тогда число $kp=ab+c^2=a(p-a)+c^2=ap+c^2-a^2$ делится на p и меньше, чем ap. Следовательно, число $a^2 - c^2 = (a-c)(a+c)$ положительно и кратно p. Тогда первая скобка положительна и $a - c < a + b = p$, поэтому она не делится на p. Вторая скобка также положительна и $a + c < 2a \leqslant a + b = p$, поэтому она также не делится на p. Мы пришли к противоречию, поэтому предположение неверно. Таким образом, $a + b$ — составное число и, значит, оно имеет хотя бы три делителя.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ и пример, в котором $a+b$ является квадратом простого числа (т. е. у него три делителя) — 2 балла.

Только доказательство того, что число $a+b$ не может быть простым (т. е. у него больше двух делителей) — 4 балла.

Хорошо известно, что количество делителей натурального n, имеющего разложение на простые сомножители вида $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Если эта формула используется без доказательства — баллы не снижаются.

В первом решении представление $(*)$ читается известным. Если оно используется без доказательства — баллы не снимаются. сли оно используется *с неверным доказательством* — снимается 1 балл.

9.4. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке A. Проведем в большей окружности Ω хорду CD, касающуюся ω в точке B (хорда AB не является диаметром ω). Точка M — середина отрезка AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CMD, проходит через центр ω.

(*П. Бибиков*)

Первое решение. Обозначим через O центр окружности ω. Проведем через точку A общую касательную к нашим окружностям; пусть она пересекает прямую CD в точке P. Поскольку $PA = PB$, точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, который также проходит через точки M и O.

Поскольку AM — высота в прямоугольном треугольнике PAO, имеем $PM \cdot PO = PA^2$. С другой стороны, по свойству касательной и секущей имеем $PA^2 = PC \cdot PD$. Значит, $PM \cdot PO = PC \cdot PD$. Это и означает, что точки C, D, O и M лежат на одной окружности.

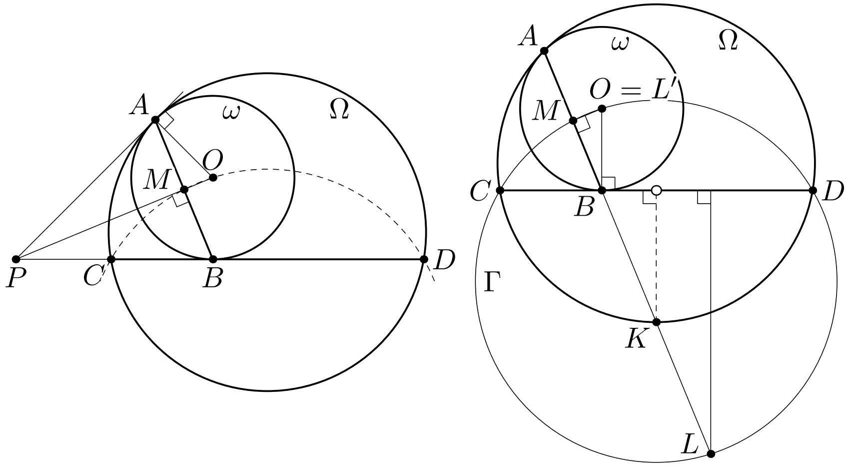


Рис. 1 Рис. 2

Второе решение. Пусть O — центр ω. Гомотетия с центром A, переводящая ω в Ω, переводит точку B в точку K окружности Ω, касательная в которой параллельна CD; иначе говоря, K — середина дуги CD.

Пусть L — точка, симметричная B относительно K. Поскольку точки A, C, K и D лежат на одной окружности, имеем

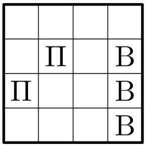
$$BC \cdot BD = BA \cdot BK = \frac{BA}{2} \cdot 2BK = BM \cdot BL,$$

так что точка L лежит на окружности Γ, описанной около треугольника CMD.

Пусть точка L' диаметрально противоположна L на этой окружности. Тогда проекции точек L и L' на хорду CD симметричны относительно середины CD. Но проекции точек L и B также симметричны относительно неё, поскольку точка K — середина LB — лежит на серединном перпендикуляре к CD. Отсюда $L'B \perp CD$, то есть L' лежит на прямой OB. Кроме того, прямые $L'M$ и OM перпендикулярны ML и потому совпадают. Значит, $O = L'$, и O лежит на Γ.

9.5. Петя и Вася играют на доске 100×100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На рисунке справа показаны вохможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

(*М. Дидин*)



Ответ. Выигрывает Петя.

Решение. Приведём одну из возможных выигрышных стратегий для Пети. Он всё время будет делать ходы, параллельные одной из диагоналей доски (назовём её *главной*).

Первым ходом Петя закрасит все клетки главной диагонали. После этого доска разбивается на две одинаковых «лесенки» (см. рис. 6). Мысленно сделаем каждую лесенку симметричной относительно вертикальной прямой, сдвинув в ней каждый горизонтальный ряд, кроме первого, на пол-клетки относительно предыдущего ряда (см. рис. 7).

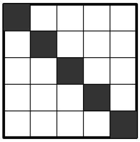


Рис. 3

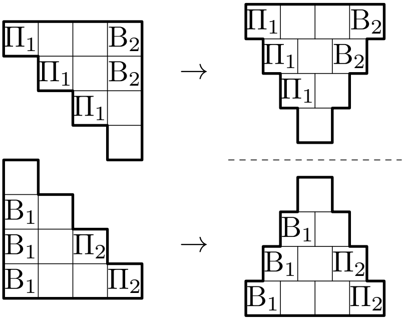


Рис. 4

В результате сдвигов и бывшие вертикали, и бывшие диагонали, параллельные главной, стали наклонными рядами. При этом «вертикали» одной лесенки симметричны «диагоналям» другой. Это значит, что на каждый ход Васи Петя может ответить симметричным ходом в другую лесенку (два таких ответа показаны на рис. 7). Тогда после каждого Петиного хода ситуация на «сдвинутой» картинке бует оставаться симметричной, а значит, Петя всегда сможет сходит согласно описанной стратегии. Так как игра закончится (не более чем за 10^4 ходов), в некоторый момент Васе будет некуда ходить, и Петя выиграет.

Комментарий. Только верный ответ и, возможно, правильный первый ход Пети — 0 баллов.

То же, с (неверными) попытками устроить симметричную стратегию после первого хода — 1 балл.

10 класс

10.1. Первоклассник составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и разбил шесть палочек на две группы по три палочки: в первой группе оказались три самых длинных палочки, а во второй — три самых коротких. Обязательно ли можно составить треугольник из трех палочек первой группы? А из трех палочек второй группы?

(*Л. Емельянов*)

Ответ. 1) Да, обязательно. 2) Нет, не обязательно.

Решение. 1) Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5 \geqslant a_6$ — данные длины палочек. Так как a_1 входила в треугольник с некоторыми двумя другими палочками, то a_1 меньше их суммы, а следовательно, меньше чем сумма двух самых длинных из оставшихся палочек: $a_1 < a_2 + a_3$. Так как $a_1 \geqslant a_2$ и $a_1 \geqslant a_3$, выполнение неравенства $a_1 < a_2 + a_3$ достаточно для того, чтобы из палочек a_1, a_2, a_3 можно было составить треугольник.

2) Пусть изначально были два равных треугольника со сторонами $1, 3, 3$ и $1, 3, 3$. Тогда в группе самых коротких палочек окажутся палочки $1, 1, 3$, из которых треугольник составить нельзя.

Замечание. В 2) существует много других примеров.

Комментарий. Только верные ответы — 0 баллов.

Верное доказательство 1) — 3 балла.

Верный пример в 2) — 4 балла.

10.2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Может ли произвдение xy равняться отрицательному числу?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Не может.

Первое решение. Докажем, что $xy > 0$. Предположим противное: $xy < 0$ ($xy \neq 0$ по условию). Не умаляя общности, $x > 0$, $y < 0$. Сложив данные в условии задачи неравенства, получим $x + y < 0$, т.е. $0 < x < -y$. Следовательно, $x^4 < y^4$. Но тогда $x < x^4 - y^4 < 0$ – противоречие.

Второе решение. Сложив данные в условии задачи неравенства, мы получим: $x + y < 0$. Преобразуем данные неравенства к виду: $x^4 - x > y^4$ и $y^4 - y > x^4$ и перемножим (это можно делать, так как их правые части положительны). Имеем: $xy(1 - x^3 - y^3) > 0$. Так как $x < -y$, то $x^3 < -y^3$, то есть $x^3 + y^3 < 0$. Поэтому $1 - x^3 - y^3 > 1 > 0$. Значит, xy — положительно.

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

Доказано, что $x + y < 0$ — 1 балл.

Ошибочные преобразования неравенств (возведение в квадрат или перемножение неравенств, знаки частей которых в решении не определены, и т.п.) — не более 1 балла за задачу.

В задаче уже указано, что числа x и y существуют. Поэтому, если доказано, что произведение xy положительно, то примера, подтверждающего возможность этой ситуации, приводить *не надо*. За отсутствие такого примера баллы не снижаются.

Только за пример, показывающий, что оба числа могут быть отрицательными, баллы не начисляются.

10.3. Пусть S – множество, состоящее из натуральных чисел. Оказалось, что для любого числа a из множества S существуют два числа b и c из множества S такие, что $a = \dfrac{b(3c-5)}{15}$. Докажите, что множество S бесконечно. (*Д. Крачун*)

Решение. Предположим противное, и множество S конечно. Тогда среди всех чисел множества S выберем число a, которое делится на максимальную степень тройки, пусть скажем, a делится на 3^m, но не делится на 3^{m+1}. Если условие выполняется, то $15a = b(3c - 5)$ для некоторых $b, c \in S$. Левая часть этого равенства делится на 3^{m+1}. Но тогда, поскольку $3c - 5$ не делится на 3, число b должно делится на 3^{m+1}, что противоречит выбору a.

Комментарий. Рассмотрено число a, которое делится на максимальную степень тройки, но решение не завершено и противоречие не получено — 3 балла.

10.4. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть m — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, параллельная стороне B_1C_1. Биссектриса угла $B_1A_1C_1$ пересекает m в точке K. Докажите, что описанная окружность треугольника BCK касается m. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть m пересекает BC в точке X, а P и Q — середины A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Для определенности, пусть X и C лежат по одну сторону от A_1. Для решения задачи достаточно доказать, что $XB \cdot XC = XK^2$.

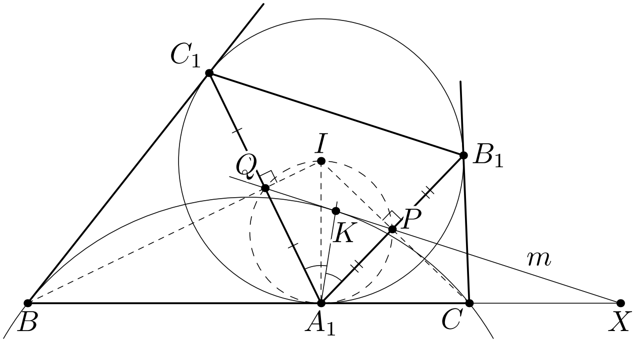


Рис. 5

Окружность (A_1PQ) получается из окружности $(A_1B_1C_1)$ гомотетией с центром A_1 и коэффициентом $1/2$. Поэтому окружность (A_1PQ) также, как и окружность $(A_1B_1C_1)$, касается BC. Используя это касание, имеем $\angle KA_1X = \angle KA_1P + \angle PA_1X = \angle KA_1Q + \angle PQA_1 = \angle A_1KX$. Следовательно, треугольник KXA_1 равнобедренный, в нем $XA_1 = XK$. Также из касания следует равенство $XP \cdot XQ = XA_1^2$.

Далее, пусть I — центр окружности $(A_1B_1C_1)$. Точки A_1 и B_1 симметричны относительно IC, значит, A_1P — высота в прямоугольном треугольнике IA_1C, откуда $IC \cdot IP = IA_1^2$. Аналогично $IB \cdot IQ = IA_1^2$, откуда $IC \cdot IP = IB \cdot IQ$, следовательно, $BQPC$ — вписанный.

Окончательно, получаем $XB \cdot XC = XP \cdot XQ = XA_1^2 = XK^2$, что и требовалось.

Комментарий. (a) Введение точки X и утверждение о том, что достаточно доказать равенство $XB \cdot XC = XK^2$ — 1 балл.

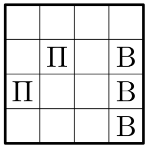
(b) Доказано, что окружность (A_1PQ) касается BC — 1 балл.

(c) Доказано, что $XA_1 = XK$ — 1 балл.

(d) Доказано, что $BQPC$ — вписанный — 1 балл.

Если в работе есть несколько из продвижений (a), (b), (c), (d), то баллы за них суммируются.

10.5. Петя и Вася играют на доске 100×100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На рисунке справа показаны вохможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (*М. Дидин*)



Ответ. Выигрывает Петя.

Решение. Приведём одну из возможных выигрышных стратегий для Пети. Он всё время будет делать ходы, параллельные одной из диагоналей доски (назовём её *главной*).

Первым ходом Петя закрасит все клетки главной диагонали. После этого доска разбивается на две одинаковых «лесенки» (см. рис. 6). Мысленно сделаем каждую лесенку симметричной относительно вертикальной прямой, сдвинув в ней каждый горизонтальный ряд, кроме первого, на пол-клетки относительно предыдущего ряда (см. рис. 7).

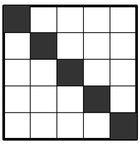


Рис. 6

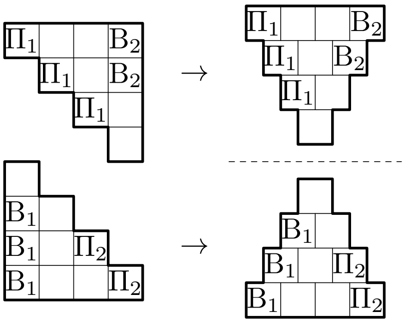


Рис. 7

В результате сдвигов и бывшие вертикали, и бывшие диагонали, параллельные главной, стали наклонными рядами. При этом «вертикали» одной лесенки симметричны «диагоналям» другой. Это значит, что на каждый ход Васи Петя может ответить симметричным ходом в другую лесенку (два таких ответа показаны на рис. 7). Тогда после каждого Петиного хода ситуация на «сдвинутой» картинке бует оставаться симметричной, а значит, Петя всегда сможет сходит согласно описанной стратегии. Так как игра закончится (не более чем за 10^4 ходов), в некоторый момент Васе будет некуда ходить, и Петя выиграет.

Комментарий. Только верный ответ и, возможно, правильный первый ход Пети — 0 баллов.

То же, с (неверными) попытками устроить симметричную стратегию после первого хода — 1 балл.

11 класс

11.1. Натуральное число, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 625. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде тысяч? (*Н. Агаханов, К. Сухов*)

Ответ. 0 или 5.

Решение. Пусть n — данное число, t — его остаток от деления на 40 и от деления на 625. Тогда число $n - t$ делится на 40 и на 625, то есть делится на НОК $(40; 625) = 5000$. Значит, разность $n - t$ оканчивается либо на 5000, либо на 0000. А остаток $t < 40$. Поэтому цифра в разряде тысяч может быть 0 или 5. Обе ситуации возможны, такие цифры имеют, например числа 20210000 и 20215000 (оба этих числа имеют остатки 0 при делении на 40 и на 625).

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

Только пример с одной из двух цифр — 0 баллов.

Только примеры с цифрами 0 и 5 — 1 балл.

Доказано только, что цифра в разрядке тысяч может быть 0 или 5 — 5 баллов.

11.2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Какой знак может иметь произведение xy (укажите все возможности)? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Знак плюс.

Первое решение. Сложив данные неравенства, мы получим: $x + y < 0$. Преобразуем данные неравенства к виду: $x^4 - x > y^4$ и $y^4 - y > x^4$ и перемножим (это можно делать, так как их правые части положительны). Имеем: $xy(1 - x^3 - y^3) > 0$. Так как $x < -y$, то $x^3 < -y^3$, то есть $x^3 + y^3 < 0$. Поэтому $1 - x^3 - y^3 > 1 > 0$. Значит, xy — положительно.

Второе решение. Докажем, что $xy > 0$. Предположим противное: $xy < 0$ ($xy \neq 0$ по условию). Не умаляя общности, $x > 0$, $y < 0$. Сложив данные неравенства, получим $x + y < 0$, т.е. $0 < x < -y$. Следовательно, $x^4 < y^4$. Но тогда $x < x^4 - y^4 < 0$ – противоречие.

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

Доказано, что $x + y < 0$ — 1 балл.

Ошибочные преобразования неравенств (возведение в квадрат или перемножение неравенств, знаки частей которых в решении не определены, и т.п.) — не более 1 балла за задачу.

В задаче уже указано, что числа x и y существуют. Поэтому, если доказано, что произведение xy положительно, то примера, подтверждающего возможность этой ситуации, приводить *не надо*. За отсутствие такого примера баллы не снижаются.

Только за пример, показывающий, что оба числа могут быть отрицательными, баллы не начисляются.

11.3. На оси Ox отметили точки $0, 1, 2, \ldots, 100$ и нарисовали графики 200 различных квадратичных функций, каждый из которых проходит через две из отмеченных точек и касается прямой $y = -1$. Для каждой пары графиков Олег написал на доске число, равное количеству общих точек этих графиков. После чего он сложил все 19900 чисел, написанных на доске. Мог ли он получить число 39699? (*О. Подлипский*)

Ответ. Не мог.

Решение. Каждому из наших 200 многочленов соответствует две целых точки a и b на оси Ox. Не умаляя общности будем считать, что $a < b$. Назовём *шириной* многочлена f натуральное число $b - a$, а *осью* многочлена — $\frac{a+b}{2}$.

Пусть многочлен f имеет ширину $w > 0$ и ось c, тогда он записывается в виде $f(x) = \frac{4}{w^2}(x - c)^2 - 1$.

Покажем, что графики двух разных многочленов такого вида имеют ровно две общих точки, когда у них разные ширины и оси. Если же у них совпадает ширина или ось, то у них ровно одна общая точка.

Действительно, $\frac{4}{w_1^2}(x-c_1)^2-1 = \frac{4}{w_2^2}(x-c_2)^2-1$ равносильно $(x - c_1)w_2 = \pm(x - c_2)w_1$. Если $w_1 \neq w_2$, то каждое из двух линейных уравнений имеет корни, и они совпадают только если $c_1 = c_2$. Если же $w_1 = w_2$, то $c_1 \neq c_2$ (трёхчлены разные) и одно из двух линейных уравнений корней не имеет, а второе имеет.

Заметим, что ширина многочлена может принимать значение от 1 до 100, при этом найдется не более одного многочлена с шириной 100. Обозначим x_i количество многочленов с шириной i. Оценим количество пар многочленов с одинаковой шириной:

$$\sum_{i=1}^{100}\frac{x_i(x_i-1)}{2}=\sum_{i=1}^{100}\frac{(x_i^2-4x_i+4)+3x_i-4}{2}=$$
$$=\sum_{i=1}^{100}\frac{(x_i-2)^2}{2}+\frac{3\cdot 200-4\cdot 100}{2}\geqslant 1+100.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались следующим соображением: так как сумма ста чисел x_i равна 200 и $x_{100}\neq 2$, то найдется ещё хотя бы одно $x_i\neq 2$, следовательно, $\sum_{i=1}^{100}(x_i-2)^2\geqslant 2$.

Осью многочлена может быть любое целое или полуцелое число от $\frac{1}{2}$ до $99\frac{1}{2}$, таких чисел 199, следовательно, найдется как минимум одна пара многочленов с общей осью. Это будет ранее не учтённая пара, так как трехчлены с общими шириной и осью совпадают.

Чтобы найти количество точек пересечения графиков надо из удвоенного количества пар многочленов вычесть количество пар с одинаковой шириной или осью. Таким образом, точек пересечения не более, чем $2\cdot\frac{200\cdot 199}{2}-101-1=39698$, что меньше, чем 39699.

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

Сформулировано, при каких условиях пара графиков имеет ровно одну общую точку — 1 балл.

Доказано, при каких условиях пара графиков имеет ровно одну общую точку — еще 1 балл.

Доказано, что число на доске не больше 39699 — 5 баллов (эти баллы не суммируется с предыдущим).

11.4. Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω. Докажите, что сферы, симметричные Ω относительно прямых SA, SB, SC и плоскости ABC, имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой ℓ – это сфера такого же радиуса, центр которой симметричен центру исходной сферы относительно прямой ℓ. (*И. Богданов*)

Первое решение. Обозначим через R радиус описанной сферы Ω тетраэдра $SABC$, через O — её центр. Отметим точку O', симметричную точке O относительно плоскости (ABC), и точку P такую, что $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OS}$ (в случае, когда точки S, O и O' не лежат на одной прямой, мы достроили треугольник SOO' до паралеллограмма $SOO'P$). Поскольку $O'P = OS = R$, то точка P лежит на сфере, симметричной Ω относительно плоскости (ABC). Покажем, что P лежит на сфере Ω_a, симметричной Ω относительно прямой SA. Рассуждение для двух других сфер аналогично.

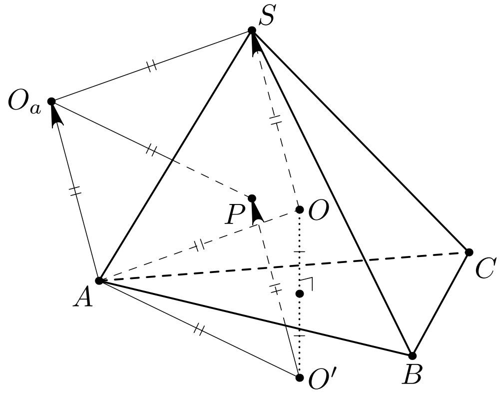


Рис. 8

Обозначим через O_a центр сферы Ω_a, эта точка симметрична точке O относительно прямой SA. Тогда четырехугольник $SOAO_a$ — ромб (или точки O и O_a совпадают с серединой отрезка SA). В любом случае $\overrightarrow{AO_a} = \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{O'P}$. Значит, AO_aPO' — параллелограмм, в котором $PO' = R = O'A$, поэтому он еще и ромб. Следовательно, $O_aP = R$, откуда и следует, что P лежит на сфере Ω_a.

Второе решение. Введем обозначения как в первом решении. Пусть также O_b и O_c — центры сфер, симметричных Ω относительно прямых SB и SC соответственно. Покажем, что радиус сферы γ_1, описанной около тетраэдра $O'O_aO_bO_c$, равен R. Тогда центр этой сферы окажется искомой точкой.

При гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $1/2$ указанная сфера перейдет в сферу γ_2, проходящую через середины ребер SA, SB, SC и центр O_1 описанной окружности треугольника ABC. А при гомотетии с центром S и коэффициентом 2 сфера γ_2 перейдет в сферу γ_3, которая проходит через точки

A, B, C и точку S', симметричную S относительно O_1. Заметим, что радиусы сфер γ_1 и γ_3 вдвое больше радиуса сферы γ_2, а потому они равны. Наконец, $O'S' = OS = R = O'A = O'B = O'C$, поскольку точки O' и O, а также S и S' симметричны относительно точки O_1. Таким образом, точка O' — центр сферы γ_3, а R — ее радиус. Тогда и радиус сферы γ_2 равен R, что и требовалось.

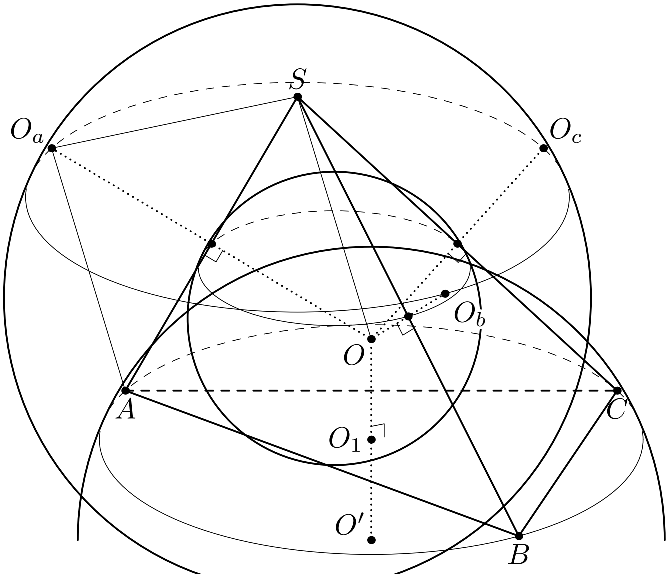


Рис. 9

Комментарий. Не разобраны «вырожденные» случаи (точки S, O, O' на одной прямой; $O = O_a$ и т.п. — баллы не снимаются.

11.5. В Цветочном городе живёт 99^2 коротышек. Некоторые из коротышек рыцари (всегда говорят правду), а остальные — лжецы (всегда лгут). Дома в городе расположены в клетках квадрата 99×99 (всего 99^2 домов, расположенных в 99 вертикальных и в 99 горизонтальных улицах). В каждом доме живет ровно один коротышка. Номер дома обозначается парой чисел $(x; y)$, где $1 \leqslant x \leqslant 99$ — номер вертикальной улицы (номера возрастают слева направо), а $1 \leqslant y \leqslant 99$ — номер горизонтальной улицы (номера возрастают снизу вверх). *Цветочным расстоянием* между двумя домами с номерами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ называется число $\rho = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Известно, что на каждой улице — вертикальной или горизонтальной — проживает не менее k рыцарей. Кроме того, все коротышки знают, в каком доме живет рыцарь Знайка. Вы хотите найти его дом, но не знаете, как выглядит Знайка. Вы можете подходить к любому дому и спрашивать живущего в нем коротышку: «Каково цветочное расстояние от вашего дома до дома Знайки?». При каком наименьшем k вы можете гарантированно найти дом Знайки? (*В. Новиков*)

Ответ. 75.

Решение. *Пример.* Покажем, что если $k = 74$, то мы не сможем гарантированно найти дом Знайки. Разместим Знайку и лжеца Незнайку в дома с номерами $(50; 49)$ и $(49; 50)$ соответственно. Покажем, что может оказаться так, что по ответам жителей нельзя однозначно определить, в каком из этих двух домов живёт Знайка.

В нижний левый квадрат 49×49 поселим рыцарей. Их расстояния до Знайки и Незнайки одинаковые. В верхний правый квадрат 50×50 тоже поселим рыцарей, их расстояния тоже одинаковы. В нижний правый прямоугольник (из 49 строк и 50 столбцов) поселим рыцарей так, чтобы в каждой строке было ровно 25 рыцарей и 25 лжецов, а в каждом столбце хотя бы 24 рыцаря и 24 лжеца. В верхний левый прямоугольник поселим коротышек диагонально-симметрично правому верхнему, причём рыцарей и лжецов поменяем местами. В нём в каждом столбце будет по 25 рыцарей и 25 лжецов, а в каждой строке хотя бы 24 рыцаря и 24 лжеца. Для каждого коротышки из этих прямоугольников расстояния до Знайки и Незнайки разные. Пусть все лжецы в них говорят расстояние не до Знайки, а до Незнайки. Тогда при замене местами рыцарей и лжецов в этих прямоугольниках (в частности, при замене местами Знайки и Незнайки) все будут говорить то же самое, но Знайка будет жить в другом доме.

Оценка. Покажем, что если $k \geqslant 75$, то мы сможем гарантированно найти дом Знайки. Предположим, что, задав вопросы всем коротышкам, мы не можем понять, где находится Знайка, т.е. есть хотя бы два дома, где он может быть. Пусть у одного номер $(x; y)$, а у другого $(u; v)$. Можно считать, что $x \leqslant u$, $y \leqslant v$, т.к. можно повернуть квадрат требуемым образом. Так как оба неравенства одновременно не могут быть равенствами, без ограничения общности будем считать, что $y < v$. Рассмотрим столбцы $(x, \ldots)$ и $(u, \ldots)$ (возможно, это один и тот же столбец).

Если $u - x > v - y$ или $(u - x) + (v - y)$ — нечётно, то в этих столбцах нет ни одного коротышки, расстояния от которого до двух выделенных домов одинаковы.

Если $x = u$, а $v - y$ чётно, то в столбце $(x, \ldots)$ находится один коротышка, расстояния от которого до двух домов одинаковы.

Если $u - x < v - y$, а $(u - x) + (v - y)$ чётно, то в столбцах $(x, \ldots)$ и $(u, \ldots)$ находятся по одному коротышке, расстояния от которого до двух домов одинаковы.

Если же $u - x = v - y$, то в столбце $(x, \ldots)$ места, от которых расстояния до $(x; y)$ и $(u; v)$ одинаковы, имеют вид $(x; V)$, где $V \geqslant v$, и таких мест ровно $100 - v$. Аналогично, в столбце $(u, \ldots)$ места, от которых расстояния до $(x; y)$ и $(u; v)$ одинаковы, имеют вид $(u; Y)$, где $Y \leqslant y$, и таких мест ровно y.

Заметим, что $y + (100 - v) \leqslant 99$. Значит, какое-то из чисел y, $100 - v$ не больше 49.

Таким образом, во всех случаях найдется столбец, в котором не более 49 рыцарей указывают на оба места, при этом на неправильное место указывают не более, чем эти рыцари и все лжецы (их не больше $99 - 75 = 24$), т.е. не более, чем $49 + 24 = 73$ коротышек. В то же время, на правильное место в любом столбце указывают хотя бы все рыцари, т.е. не менее 75 коротышек. Таким образом, из двух подозрительных мест всегда можно исключить одно (т.к. строка или столбец, на который мы ориентируемся зависит только от положения мест, а не от расположения рыцарей/лжецов). Значит, всегда можно найти единственное правильное место.

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

Только пример — 3 балла.

Только оценка — 4 балла.