Материалы для проведения заключительного этапа

XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2021–2022 учебный год

Второй день

Саранск,
17–25 апреля 2022 г.

Москва, 2022

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, М. А. Антипов, А. В. Антропов, И. И. Богданов, Д. Ю. Бродский, А. С. Голованов, М. А. Дидин, П. Ю. Козлов, Д. Н. Крачун, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, $\ldots$, в которой нет двух равных членов. Отрезок a_i, a_{i+1}, $\ldots$, a_{i+m-1} этой последовательности назовём *монотонным отрезком длины m*, если выполнены неравенства $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m-1}$ или неравенства $a_i > a_{i+1} > \ldots > a_{i+m-1}$. Оказалось, что для каждого натурального k член a_k содержится в некотором монотонном отрезке длины $k+1$. Докажите, что существует натуральное N такое, что последовательность a_N, a_{N+1}, $\ldots$ монотонна, т. е. $a_N < a_{N+1} < \ldots$ или $a_N > a_{N+1} > \ldots$. *(А.С. Голованов)*

Первое решение. Будем называть индекс $k \geqslant 2$ *плохим*, если $a_{k-1} < a_k > a_{k+1}$ или $a_{k-1} > a_k < a_{k+1}$. Заметим, что если среди индексов $N+1, N+2, \ldots$ нет плохих, то последовательность $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ монотонна.

Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда найдётся бесконечно много плохих индексов. Выберем некоторый плохой индекс k. Возьмём произвольное $n > k$ и рассмотрим монотонный отрезок I длины $n+1$, содержащий a_n. Он не может содержать членов a_{k-1}, a_k и a_{k+1} одновременно; следовательно, поскольку $k+1 \leqslant n$, отрезок I точно не содержит a_{k-1}, а следовательно, не содержит и a_1.

Итак, монотонный отрезок I длины $n+1$ содержит a_n, но не содержит a_1; тогда он обязан содержать a_n, a_{n+1} и a_{n+2}, так что индекс $n+1$ не является плохим. Итак, при любом $n > k$ индекс $n+1$ не плохой, поэтому плохих индексов конечное количество. Противоречие.

Второе решение. Предположим противное. Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 < a_2$ (иначе можно умножить все члены последовательности на -1). Поскольку последовательность $a_2, a_3, \ldots$ не является возрастающей, существует такое $k \geqslant 2$, что $a_k > a_{k+1}$. Поскольку последовательность $a_{k+1}, a_{k+2} \ldots$ не является убывающей, существует такое $\ell > k$, что $a_\ell < a_{\ell+1}$. Выберем наименьшее ℓ, удовлетворяющее этим двум неравенствам. Тогда либо $\ell > k+1$, и тогда $a_{\ell-1} > a_\ell$ согласно выбору ℓ, либо $\ell = k+1$, и тогда $a_{\ell-1} = a_k > a_{k+1} = a_\ell$. Итак, в любом случае $a_{\ell-1} > a_\ell$.

Рассмотрим монотонный отрезок длины ℓ, содержащий $a_{\ell-1}$; он обязан содержать и a_ℓ. Поскольку $a_{\ell-1} > a_\ell$, числа этого отрезка монотонно убывают. Значит, он не может содержать числа a_1 (иначе бы он содержал и $a_2 > a_1$). Но тогда, раз длина отрезка равна ℓ, он обязан содержать и $a_{\ell+1} > a_\ell$, что невозможно.

9.6. Для какого наименьшего натурального числа a существуют целые числа b и c такие, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет два различных положительных корня, не превосходящих $\frac{1}{1000}$? *(А. Храбров)*

Ответ. $a = 1\,001\,000$.

Первое решение. Докажем, что $a \geqslant 1\,001\,000$. Заметим, что если y — корень трёхчлена ax^2+bx+c, то $1/y$ — корень трёхчлена cx^2+bx+a. Поэтому в задаче нужно найти наименьшее натуральное a, для которого корни x_1 и x_2 некоторого трёхчлена cx^2+bx+a (с целыми b и c) больше 1000. Поскольку x_1 и x_2 положительны и $x_1x_2 = a/c$ (по теореме Виета), имеем $c > 0$.

Если $c = 1$, то $|x_1 - x_2| = \sqrt{b^2-4a} \geqslant 1$. Поскольку меньший корень не меньше 1000, больший корень не меньше 1001, а тогда $a = x_1x_2 \geqslant 1001\cdot 1000$. Если же $c \geqslant 2$, то $a = cx_1x_2 \geqslant 2x_1x_2 > > 2\,000\,000$. В обоих случаях требуемая оценка доказана.

Осталось заметить, что трёхчлен $x^2 - (1000+1001)x + + 1001\cdot 1000$ имеет корни 1000 и 1001, поэтому $a = 1\,001\,000$ подходит.

Второе решение. Положим для краткости $n = 1000$. Пусть x_1 и x_2 — два различных корня трёхчлена $f(x) = ax^2+bx+c$, причём $0 < x_1 < x_2 \leqslant \frac{1}{n}$. Тогда число $b = -a(x_1+x_2)$ отрицательно, а число $c = ax_1x_2$ положительно. Более того, имеем $\frac{-b}{a} = x_1 + x_2 < \frac{2}{n}$, откуда $a > -\frac{nb}{2}$.

Поскольку корни различны, дискриминант $D = b^2 - 4ac$ положителен. Следовательно, $b^2 > 4ac > -2nbc$ и, значит, $-b >$

$> 2nc$. Поэтому $a > (-b)\cdot\frac{n}{2} > 2nc\cdot\frac{n}{2} = n^2c$. Пусть $a = n^2c + d$, где d — натуральное число.

Предположим, что $a < n^2 + n$. Тогда $c = 1$ и $d < n$. Стало быть, $0 \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n} + c = \frac{d}{n^2} + \frac{b}{n} + 2 < \frac{1}{n} + \frac{b}{n} + 2$ и, значит, $-b < 2n + 1$. Следовательно, $-b \leqslant 2n$ и $D = b^2 - 4ac \leqslant 4n^2 - 4(n^2 + d) = -4d < 0$. Это противоречие показывает, что $d \geqslant n$.

Если же $a = n^2 + n$, то при $b = -2n - 1$ и $c = 1$ трёхчлен имеет корни $x_1 = \frac{1}{n+1}$ и $x_2 = \frac{1}{n}$.

9.7. В стране 998 городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Согласно закону, между любой парой городов должно быть не больше одного рейса. Другой закон требует, чтобы для любой группы городов было не больше $5k + 10$ рейсов, соединяющих два города этой группы, где k — количество городов в группе. В настоящий момент законы соблюдены. Докажите, что министерство развития может ввести несколько новых рейсов так, чтобы законы по-прежнему соблюдались, а общее количество рейсов в стране стало равным 5 000.

(*И. Богданов*)

Решение. Назовём набор городов *критическим*, если есть ровно $5k+10$ рейсов, соединяющих два города этой группы, где k — количество городов в группе (тогда $k > 11$, ибо иначе между городами группы есть не более $k(k-1)/2 \leqslant 5k < 5k+10$ рейсов). Если группа из всех 998 городов критическая, то в стране уже $5\cdot 998 + 10 = 5\,000$ рейсов.

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что законы в любой момент соблюдены. Обозначим через $f(X)$ количество рейсов, соединяющих два города группы X.

Докажем, что если группа из всех городов не критическая, то министерство может добавить один рейс с соблюдением законов. Повторяя такие операции, министерство добьётся требуемого. Заметим, что, если между городами x и y нет рейса, то добавить его министерство не может лишь в случае, когда оба города x и y входят в какую-то критическую группу.

Лемма. *Пусть A и B — критические группы. Тогда группа $A \cup B$ также критическая.*

Доказательство. Положим $C = A \cap B$, $D = A \cup B$. Пусть $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$; тогда $|D| = a+b-c$. По условию, имеем $f(A) = 5a + 10$, $f(B) = 5b + 10$ и $f(C) \leqslant 5c + 10$. Заметим, что все рейсы, посчитанные в $f(A)$ и $f(B)$, учитываются также и в $f(D)$; более того, если какой-то рейс учтён и в $f(A)$, и в $f(B)$, то оба его конца лежат в C, то есть количество дважды учтённых рейсов равно $f(C)$. Поэтому

$$f(D) \geqslant f(A) + f(B) - f(C) \geqslant (5a + 10) + (5b + 10) - (5c + 10) = \\ = 5(a + b - c) + 10 = 5d + 10.$$

Учитывая, что законы соблюдены, получаем $f(D) = 5d+10$, что и требовалось. $\square$

Вернёмся к решению. Если в настоящий момент нет ни одной критической группы, можно добавить рейс между любой парой городов, между которыми его ещё нет (такая пара найдётся!). Иначе, применяя лемму, получаем, что объединение всех критических групп — тоже критическая группа A; по предположению, в ней $a < 998$ городов. Пусть x — город вне A; тогда x не входит ни в какую критическую группу.

Пусть из x идёт k рейсов в города из A. Поскольку группа $A' = A \cup \{x\}$ не критическая, имеем

$$5(a + 1) + 10 > f(A') = f(A) + k = 5a + 10 + k,$$

откуда $k < 5$. С другой стороны, $a \geqslant 12$, поэтому в A есть город y, не соединённый рейсом с x, и города x и y не входят в одну критическую группу. Значит, министерство может ввести рейс между x и y.

9.8. В треугольник ABC вписана окружность ω, касающаяся стороны BC в точке K. Окружность ω' симметрична окружности ω относительно точки A. Точка A_0 выбрана так, что отрезки BA_0 и CA_0 касаются ω'. Пусть M — середина стороны BC. Докажите, что прямая AM делит отрезок KA_0 пополам. (*А. Шевцов*)

Решение. Пусть точки B', C' и K' симметричны относительно A точкам B, C и K соответственно. Тогда окружность ω' вписана в треугольник $AB'C'$ и касается $B'C'$ в точке K'. Медиана AM является средней линией в треугольниках BCC' и $B'BC$, так что $AM \parallel BC' \parallel B'C$. Поскольку A — середина KK', утверждение задачи равносильно тому, что прямая AM содержит среднюю линию треугольника $KK'A_0$ (параллельную A_0K'), то есть утверждение равносильно параллельности $B'C \parallel A_0K'$.

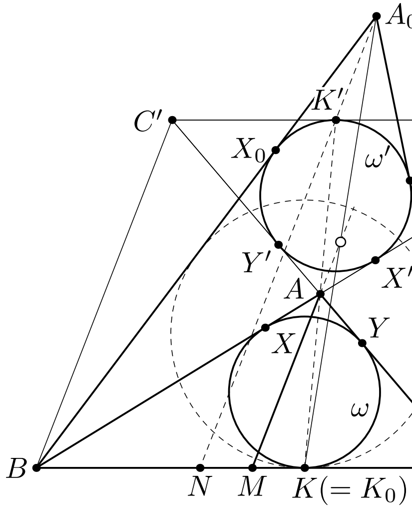

Рис. 1

Пусть ω касается AB и AC в точках X и Y соответственно, а ω' касается отрезков AB', AC', A_0B и A_0C в точках X', Y', X_0 и Y_0 соответственно. Заметим, что $AB - AC = (AX + XB) - (AY + YC) = XB - YC = KB - KC$. Аналогично, если вписанная окружность треугольника A_0BC касается BC в точке K_0, то $A_0B - A_0C = K_0B - K_0C$. Однако

$$A_0B - A_0C = (A_0X_0 + X_0B) - (A_0Y_0 + Y_0C) = X_0B - Y_0C = \\ = X'B - Y'C = (XA + AB) - (YA + AC) = AB - AC,$$

так что $KB - KC = K_0B - K_0C$, и потому $K = K_0$.

Из доказанного следует, что вневписанные окружности треугольников ABC и A_0BC также касаются отрезка BC в одной и той же точке N, симметричной K относительно M (поскольку $BN = CK$). Гомотетия с центром A_0, переводящая прямую BC в прямую $B'C'$, переводит вневписанную окружность треугольника A_0BC в окружность ω', то есть точку N — в K'. Значит, N лежит на прямой A_0K; но, поскольку $BN = CK = C'K'$, имеем $K'N \parallel B'C$, то есть $A_0K' \parallel B'C$, что и требовалось.

Замечание 1. После первого абзаца решение также можно завершить применением теоремы Брианшона к описанному (около ω') шестиугольнику $A_0BB'K'C'C$. Теорема утверждает, что три главных диагонали A_0K', BC', $B'C$ этого шестиугольника пересекаются в одной точке или попарно параллельны; в нашей задаче реализуется второй случай, то есть $A_0K' \parallel BC' \parallel B'C$.

Замечание 2. Из утверждения задачи следует, что центр I' вписанной окружности треугольника A_0BC лежит на AM. Существуют способы решить задачу, доказав этот факт.

10 класс

10.5. На доске написаны 11 целых чисел (не обязательно различных). Может ли оказаться, что произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести? (*И. Богданов*)

Ответ. Может.

Решение. Пусть одно из чисел равно 10, а каждое из остальных равно -1. Тогда произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести. Действительно, если число 10 входит в произведение пяти чисел, то это произведение равно 10, а произведение оставшихся шести чисел равно 1, и $10 > 1$. Если же число 10 не входит в произведение пяти чисел, то это произведение равно -1, а произведение оставшихся шести чисел равно -10, и $-1 > -10$.

10.6. Дано натуральное число $n > 5$. На кольцевой полоске бумаги написана последовательность из нулей и единиц. Для каждой последовательности w из n нулей и единиц посчитали количество способов вырезать из полоски фрагмент, на котором написана w. Оказалось, что наибольшее количество M достигается на последовательности $11\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$, а наименьшее (возможно, нулевое) — на последовательности $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$. Докажите, что есть и другая последовательность из n нулей и единиц, встречающаяся ровно M раз. (*И. Богданов*)

Решение. Обозначим через N количество способов вырезать из полоски последовательность $1\underbrace{00\ldots0}_{\geqslant n-2}1$ (т.е. количество последовательностей из хотя бы $n-2$ нулей, перед и после которых стоят единицы). Перед каждой из них может стоять или 1, или 0; обозначим количество тех, перед которыми стоят 1, через N_{1x}, перед которыми стоят 0 — через N_{0x}. После каждой из N последовательностей может стоять или 0, или 1; аналогично предыдущему предложению введём количества N_{x0} и N_{x1}. Тогда

$$N_{0x} + N_{1x} = N = N_{x0} + N_{x1}. \qquad (*)$$

Заметим, что N_{1x} — это количество способов вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{\geqslant n-2}1$. Каждый такой способ соответствует способу вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$; и наоборот, каждый способ вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$ можно единственным образом дополнить до способа вырезать последовательность $11\underbrace{00\ldots0}_{\geqslant n-2}1$. Значит, количества таких способов одинаковые, и $N_{1x} = M$. Аналогично N_{0x}, N_{x0} и N_{x1} равняются количествам способов вырезать последовательности $01\underbrace{00\ldots0}_{n-2}$, $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}10$ и $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$ соответственно. По условию, последовательность $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$ встречается наименьшее число раз, откуда $N_{0x} \geqslant N_{x1}$. Тогда, с учётом $(*)$, получаем $N_{x0} \geqslant N_{1x} = M$, что возможно только при $N_{x0} = M$. Значит, последовательность $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}10$ также встречается ровно M раз.

Замечание. То же самое решение можно изложить на немного другом языке. Обозначим через x^k последовательность из k букв x. Для слова w обозначим через $f(w)$ количество способов вырезать w из полоски. Тогда для любого слова w выполнено равенство $f(w) = f(0w) + f(1w) = f(w0) + f(w1)$.

Заметим, что $f(10^{n-1}) + f(0^n) = f(0^{n-1}) = f(0^n) + f(0^{n-1}1)$, так что $f(10^{n-1}) = f(0^{n-1}1)$.

Теперь

$$f(110^{n-2}) + f(010^{n-2}) = f(10^{n-2}) = f(10^{n-2}1) + f(10^{n-1}) =$$
$$= f(10^{n-2}1) + f(0^{n-1}1) = f(0^{n-2}1) = f(0^{n-2}11) + f(0^{n-2}10).$$

Таким образом, разность между наибольшим и наименьшим количествами способов равна

$$f(110^{n-2}) - f(0^{n-2}11) = f(0^{n-2}10) - f(010^{n-2}).$$

В частности, должно выполняться $f(0^{n-2}10) = M$.

10.7. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, а на стороне AD — точка F так, что описанная окружность треугольника ABE касается отрезка CF. Докажите, что описанная окружность треугольника CDF касается прямой AE.

(*А. Кузнецов, П. Кожевников*)

Первое решение. Обозначим точку касания окружности (ABE) с отрезком CF через P. Пусть прямая, проходящая через C и параллельная AP, пересекает отрезок AE в точке Q (см. рис. 2). Тогда $\angle QCP = \angle APF = \angle AEP$ (из упомянутых выше касания и параллельности). Значит, четырёхугольник $CEQP$ вписанный. Имеем $\angle QPC = 180^\circ - \angle QEC = \angle QAF$. Следовательно, четырёхугольник $QPFA$ вписанный. Тогда $\angle AQF = \angle APF = \angle QCP$, откуда $QF \parallel EP$. Значит, прямые CQ, EP, PA и QF ограничивают параллелограмм, откуда $\angle CQF = \angle APE$. Так как $\angle APE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle CDF$, то точка Q лежит на окружности (CDF). Раз $\angle AQF = \angle QCP$, то окружность (CDF) касается отрезка AE в точке Q, что и требовалось.

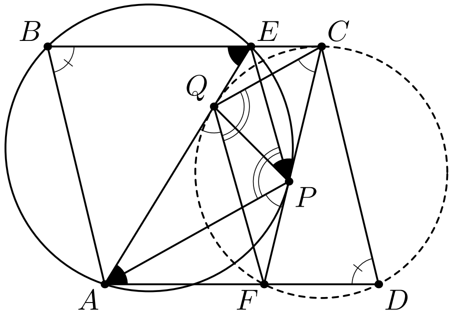

Рис. 2

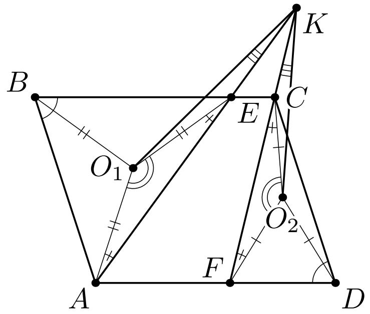

Рис. 3

Второе решение. Обозначим через O_1 центр окружности (ABE), пусть R_1 — её радиус и d_1 — расстояние от точки O_1 до прямой CF. Обозначим через O_2 центр окружности (CDF), пусть R_2 — её радиус и d_2 — расстояние от точки O_2 до прямой AE. Мы докажем более общий факт: $d_1/R_1 = d_2/R_2$ $(\star)$.

В частности, если $d_1 = R_1$, то $d_2 = R_2$, и первое равносильно касанию прямой CF и окружности (ABE), второе — касанию прямой AE и окружности (CDF).

Если $AE \parallel CF$, то точки E и F, а также O_1 и O_2 симметричны относительно центра параллелограмма, и в силу этой центральной симметрии $d_1 = d_2$ и $R_1 = R_2$, откуда следует $(\star)$.

Иначе без ограничения общности будем считать, что луч AE пересекает луч FC, обозначим их точку пересечения через K (см. рис. 3).

Обозначим через α углы при вершинах B и D параллелограмма $ABCD$. Разберём случай $\alpha < 90^\circ$, в других случаях рассуждение аналогично. Тогда $\angle AO_1E = 2\alpha = \angle CO_2F$, поэтому равнобедренные треугольники AO_1E и CO_2F подобны, откуда $\angle EAO_1 = \angle CFO_2$ и $\frac{R_1}{R_2} = \frac{O_1A}{O_2F} = \frac{AE}{CF} = \frac{KA}{KF}$ (последнее равенство следует из теоремы Фалеса). Следовательно, треугольники KAO_1 и KFO_2 подобны по углу и отношению заключающих сторон. Значит, $\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{O_1A}{O_2F} = \frac{R_1}{R_2}$ и $\angle O_1KA = \angle O_2KF$. Тогда $\angle O_1KF = \angle O_2KA$, следовательно, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{O_1K}{O_2K} = \frac{R_1}{R_2}$, что и требовалось.

Замечание. Соотношение ($\star$) равносильно тому, что угол между окружностью (ABE) и прямой CF равен углу между окружностью (CDF) и прямой AE.

Третье решение. Пусть окружность (ABE) касается отрезка CF в точке P и вторично пересекает прямую AD в точке X. Обозначим вторую точку пересечения окружности (FCD) с прямой BC через Y (см. рис. 4). Тогда отрезки XE и AB симметричны относительно серединного перпендикуляра к BE, а отрезки CD и YF — относительно серединного перпендикуляра к DF, поэтому $\overrightarrow{XE} = \overrightarrow{FY}$. Поскольку окружность ABE касается отрезка CF, то точка X лежит на луче FA. Значит, точка Y лежит на луче EC, причём $XF = EY$.

Поскольку окружность $(ABEX)$ касается отрезка CF в точке P, $CP^2 = CE \cdot CB$ и $FP^2 = FA \cdot FX$. Значит, $CF = \sqrt{CE \cdot CB} + \sqrt{FX \cdot FA}$ ($\star$). Мы позднее докажем, что отсюда следует равенство $AE = \sqrt{AF \cdot AD} + \sqrt{EY \cdot YC}$ ($\star\star$), сначала завершим решение задачи с его помощью: отметим на отрезке AE точку T так, что $ET = \sqrt{EY \cdot EC}$ и $AT = \sqrt{AF \cdot AD}$. Если точка T отлична от концов отрезка AE, полученные равенства означают, что окружности (YCT) и (FDT) касаются прямой AE в точке T. Если эти окружности не совпадают, то они обе не совпадают и с окружностью $(FYCD)$, но в таком случае

AE, BC и AD — радикальные оси этих трех окружностей. Однако, прямые BC и AE пересекаются в точке E, не лежащей на прямой AD, противоречие. Значит, на самом деле окружности (YCT) и (FDT) совпадают, а тогда это и есть окружность (CDF), и она касается AE в точке T. Если точки Y и C совпадают, нужно, как обычно, под окружностью (YCT) понимать окружность, проходящую через T и касающуюся BC в точке Y. В случае, когда T совпадает с одним из концов отрезка AE, возможна лишь ситуация $T = E$, и тогда $EY = 0$, то есть $E = Y$, а также $AE^2 = AF \cdot AD$. Итого, окружность (CFD) касается AE в точке E.

Остаётся доказать соотношение $(\star\star)$. Положим $EY = a, EC = x, AF = y$. Из сказанного выше, векторы $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{XE}, \overrightarrow{FY}, \overrightarrow{CD}$ равны по длине, обозначим её b, а также равны их проекции на ось, сонаправленную вектору $\overrightarrow{BC}$, обозначим такую проекцию h. Положим $d = 2h - a$. Тогда $BE = y + d$ и $DF = x + d$. По теореме Птолемея для четырёхугольников $FYCD$ и $ABEX$ мы получаем, что $CF^2 = b^2 + (x+d)(x-a)$ и $AE^2 = b^2 + (y+d)(y-a)$. Отметим, что эти равенства будут выполняться вне зависимости от взаимного расположения точек A и X; C и Y. Итого, соотношение $(\star)$ имеет вид

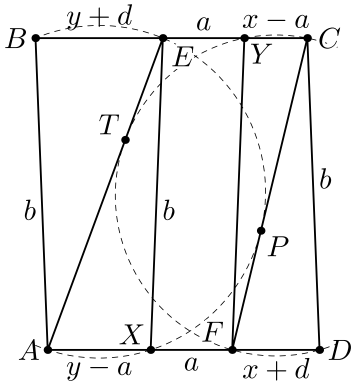

Рис. 4

$$\sqrt{b^2 + (x+d)(x-a)} = \sqrt{x(x+y+d)} + \sqrt{ay}.$$

После возведения в квадрат и сокращения общих слагаемых, получается симметричное по x и y равенство:

$$b^2 = a(x+y) + ad + xy + 2\sqrt{axy(x+y+d)}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{b^2 + (y+d)(y-a)} = \sqrt{y(x+y+d)} + \sqrt{ax},$$

а это в точности соотношение $(\star\star)$, что и требовалось.

Замечание. Точка T совпадает с точкой Q из решения 1.

10.8. Для натурального числа N рассмотрим все различные точные квадраты, которые можно получить из N вычёркиванием одной цифры в его десятичной записи. Докажите, что количество этих квадратов не превосходит некоторой величины, не зависящей от N. (*С. Берлов, Ф. Петров, Д. Крачун*)

Решение. Пусть число N состоит из $k+1$ цифры. Считаем далее, что $k > 100$: меньшие числа не влияют на искомую ограниченность.

Для $i = 1, \ldots, k$ обозначим через n_i число, получающееся удалением из N i-ой с конца цифры. Обозначим через $f(N)$ количество точных квадратов в множестве $\{n_1, \ldots, n_k\}$. Наша цель — доказать, что $f(N)$ ограничено сверху.

Пусть $N = 10^t N_1$, где N_1 не кратно 10. Если t нечётно, то число n_i может быть точным квадратом только при $i \leqslant t+1$, так что в этом случае $f(N) \leqslant 2$. Если t чётно, то заключительные t нулей не влияют на дело, поэтому $f(N) = f(N_1)$. Поэтому далее считаем, что N не кратно 10.

Выделим множество $A \subset \{1, \ldots, k\}$ из $f(N)$ номеров i, для которых $n_i = m_i^2$ — точный квадрат, причём натуральные числа m_i, $i \in A$, попарно различны.

Отметим следующее:

1) $n_i \geqslant 10^{k-1}$, следовательно $m_i \geqslant 10^{(k-1)/2}$ при всех $i \in A$;
2) $|n_i - n_j| < 10^{\max(i,j)}$;
3) $N - n_i$ кратно 10^{i-1}.

Из свойства 1) следует, что для различных номеров $i \neq j$ из A имеет место оценка

$$|n_i - n_j| = |m_i^2 - m_j^2| \geqslant m_i + m_j \geqslant 2 \cdot 10^{(k-1)/2}.$$

Сопоставляя это со свойством 2), получаем, что $\max(i,j) > (k-1)/2$. Таким образом, все элементы A, кроме, быть может, одного, больше, чем $(k-1)/2$. Обозначим $A_1 := A \setminus \{\min(A)\}$ (удалили из A наименьший элемент), тогда $|A_1| = f(N) - 1$ и $\min(A_1) \geqslant k/2$.

Пусть $j > i$ — два элемента множества A_1. Тогда по свойствам 1), 2) имеем

$$10^j > |n_i - n_j| = |m_i^2 - m_j^2| \geqslant 2 \cdot 10^{(k-1)/2} \cdot |m_i - m_j|. \qquad (1)$$

С другой стороны, по свойству 3) число $n_i - n_j = (m_i - m_j)(m_i + m_j)$ кратно 10^{i-1}.

Положим $r = \lceil (i-1)/2 \rceil$ (где $\lceil \cdot \rceil$ обозначает верхнюю целую часть). Хотя бы одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ кратно 2^r, и хотя бы одно кратно 5^r. Кроме того, если N нечётно, то нечётны числа m_i, m_j, поэтому одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ не кратно 4 — а другое, соответственно, кратно 2^{i-2}. Иначе N не кратно 5, и аналогичным образом получаем, что одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ кратно 5^{i-1}.

Рассмотрим пятиэлементное подмножество $\tilde{A} \subset A_1$, наименьший элемент $\tilde{A}$ обозначим u, а наибольший v. Обозначим $r = \lceil (u-1)/2 \rceil$. Если N нечётно, положим $\alpha = u - 2$, $\beta = r$; иначе положим $\alpha = r$, $\beta = u - 1$. Из доказанного следует, что элементы множества $\{m_s : s \in \tilde{A}\}$ дают не более двух различных остатков по модулю 2^α и не более двух различных остатков по модулю 5^β. Значит, в $\tilde{A}$ найдутся два различных элемента $i < j$ такие, что $m_j - m_i$ кратно $2^\alpha 5^\beta$. Тогда по (1) получаем

$$\begin{aligned} 10^v \geqslant 10^j \geqslant 2 \cdot 10^{(k-1)/2} 2^\alpha 5^\beta \geqslant \\ \geqslant 10^{(k-1)/2 + (u-1)/2} 2^{(u-1)/2} > 10^{u-1} 2^{u/2}, \end{aligned}$$

откуда следует что $v/u > 1,01$. Таким образом, если разбить отрезок $[k/2, k]$ на группы подряд идущих чисел, в каждой из которых отношение любых двух элементов меньше чем $1,01$ (количество таких групп меньше, например, миллиона), то любая из этих групп содержит не более 4 элементов множества A_1. Отсюда вытекает ограниченность числа $|A_1| = f(N) - 1$.

11 класс

11.5. На доске написаны 11 целых чисел (не обязательно различных). Может ли оказаться, что произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести? (*И. Богданов*)

Ответ. Может.

Решение. Пусть одно из чисел равно 10, а каждое из остальных равно -1. Тогда произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести. Действительно, если число 10 входит в произведение пяти чисел, то это произведение равно 10, а произведение оставшихся шести чисел равно 1, и $10 > 1$. Если же число 10 не входит в произведение пяти чисел, то это произведение равно -1, а произведение оставшихся шести чисел равно -10, и $-1 > -10$.

11.6. Дано натуральное число n. Саша утверждает, что для любых n лучей в пространстве, никакие два из которых не имеют общих точек, он сможет отметить на этих лучах k точек, лежащих на одной сфере. При каком наибольшем k его утверждение верно? (*А. Кузнецов*)

Ответ. $k = n$ при чётном n, $k = n + 1$ при нечётном n, то есть $2 \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Решение. *Пример.* При чётном $n = 2m$ рассмотрим m параллельных прямых и на каждой выделим пару непересекающихся лучей. Заметим, что в каждой паре лучей пересечений со сферой не больше двух, так как прямая имеет со сферой не более двух общих точек, поэтому $k \leqslant 2m$. Пример для нечётного $n = 2m-1$ получается удалением из примера для $n = 2m$ одного луча.

Оценка. Рассмотрим некоторую прямую ℓ, которая не перпендикулярна ни одному из наших лучей. Рассмотрим проекции наших лучей на ℓ, среди них не менее $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ направлены в одну сторону (будем говорить, что вправо), забудем про остальные лучи. Пусть точка X на прямой принадлежит всем выбранным проекциям, выберем произвольную точку $Y \in \ell$ правее. Пусть α_X и α_Y — плоскости, перпендикулярные прямой ℓ, проходящие через X и Y соответственно. Каждый из выбранных нами лучей пересекает обе эти плоскости. Выберем достаточно большое R такое, чтобы окружность $\omega \subset \alpha_Y$ с центром Y и радиуса R содержала внутри все точки пересечения плоскости α_Y с выбранными лучами. Рассмотрим сферу Ω, которая касается плоскости α_X в точке X и содержит окружность ω. Рассмотрим любой из наших лучей. Он проходит через точку внутри сферы Ω, а его начало лежит в другом полупространстве относительно плоскости α_X, нежели Ω, поэтому он пересекает Ω в двух точках. Таким образом, мы получили $k = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil$ точек пересечения.

11.7. Для натурального числа N рассмотрим все различные точные квадраты, которые можно получить из N вычёркиванием одной цифры в его десятичной записи. Докажите, что количество этих квадратов не превосходит некоторой величины, не зависящей от N. (*С. Берлов, Ф. Петров, Д. Крачун*)

Решение. Пусть число N состоит из $k+1$ цифры. Считаем далее, что $k > 100$: меньшие числа не влияют на искомую ограниченность.

Для $i = 1, \ldots, k$ обозначим через n_i число, получающееся удалением из N i-ой с конца цифры. Обозначим через $f(N)$ количество точных квадратов в множестве $\{n_1, \ldots, n_k\}$. Наша цель — доказать, что $f(N)$ ограничено сверху.

Пусть $N = 10^t N_1$, где N_1 не кратно 10. Если t нечётно, то число n_i может быть точным квадратом только при $i \leqslant t+1$, так что в этом случае $f(N) \leqslant 2$. Если t чётно, то заключительные t нулей не влияют на дело, поэтому $f(N) = f(N_1)$. Поэтому далее считаем, что N не кратно 10.

Выделим множество $A \subset \{1, \ldots, k\}$ из $f(N)$ номеров i, для которых $n_i = m_i^2$ — точный квадрат, причём натуральные числа m_i, $i \in A$, попарно различны.

Отметим следующее:

1) $n_i \geqslant 10^{k-1}$, следовательно $m_i \geqslant 10^{(k-1)/2}$ при всех $i \in A$;

2) $|n_i - n_j| < 10^{\max(i,j)}$;

3) $N - n_i$ кратно 10^{i-1}.

Из свойства 1) следует, что для различных номеров $i \neq j$ из A имеет место оценка

$$|n_i - n_j| = |m_i^2 - m_j^2| \geqslant m_i + m_j \geqslant 2 \cdot 10^{(k-1)/2}.$$

Сопоставляя это со свойством 2), получаем, что $\max(i,j) > (k-1)/2$. Таким образом, все элементы A, кроме, быть может, одного, больше, чем $(k-1)/2$. Обозначим $A_1 := A \setminus \{\min(A)\}$ (удалили из A наименьший элемент), тогда $|A_1| = f(N) - 1$ и $\min(A_1) \geqslant k/2$.

Пусть $j > i$ — два элемента множества A_1. Тогда по свойствам 1), 2) имеем

$$10^j > |n_i - n_j| = |m_i^2 - m_j^2| \geqslant 2 \cdot 10^{(k-1)/2} \cdot |m_i - m_j|. \qquad (1)$$

С другой стороны, по свойству 3) число $n_i - n_j = (m_i - m_j)(m_i + m_j)$ кратно 10^{i-1}.

Положим $r = \lceil (i-1)/2 \rceil$ (где $\lceil \cdot \rceil$ обозначает верхнюю целую часть). Хотя бы одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ кратно 2^r, и хотя бы одно кратно 5^r. Кроме того, если N нечётно, то нечётны числа m_i, m_j, поэтому одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ не кратно 4 — а другое, соответственно, кратно 2^{i-2}. Иначе N не кратно 5, и аналогичным образом получаем, что одно из чисел $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ кратно 5^{i-1}.

Рассмотрим пятиэлементное подмножество $\tilde{A} \subset A_1$, наименьший элемент $\tilde{A}$ обозначим u, а наибольший v. Обозначим $r = \lceil (u-1)/2 \rceil$. Если N нечётно, положим $\alpha = u-2$, $\beta = r$; иначе положим $\alpha = r$, $\beta = u-1$. Из доказанного следует, что элементы множества $\{m_s : s \in \tilde{A}\}$ дают не более двух различных остатков по модулю 2^α и не более двух различных остатков по модулю 5^β. Значит, в $\tilde{A}$ найдутся два различных элемента $i < j$ такие, что $m_j - m_i$ кратно $2^\alpha 5^\beta$. Тогда по (1) получаем

$$\begin{aligned} 10^v \geqslant 10^j \geqslant 2 \cdot 10^{(k-1)/2} 2^\alpha 5^\beta \geqslant \\ \geqslant 10^{(k-1)/2 + (u-1)/2} 2^{(u-1)/2} > 10^{u-1} 2^{u/2}, \end{aligned}$$

откуда следует что $v/u > 1{,}01$. Таким образом, если разбить отрезок $[k/2, k]$ на группы подряд идущих чисел, в каждой из которых отношение любых двух элементов меньше чем $1{,}01$ (количество таких групп меньше, например, миллиона), то любая из этих групп содержит не более 4 элементов множества A_1. Отсюда вытекает ограниченность числа $|A_1| = f(N) - 1$.

11.8. Из каждой вершины треугольника ABC провели внутрь него два луча, красный и синий, симметричные относительно биссектрисы соответствующего угла. Около треугольников, образованных при пересечении лучей одного цвета, описали окружности. Докажите, что если описанная окружность треугольника ABC касается одной из этих окружностей, то она касается и другой. (*А. Кузнецов, И. Фролов*)

Первое решение. Обозначим треугольник, образованный синими лучами, через $A_1B_1C_1$ (как на рисунке), и пусть его описанная окружность касается окружности (ABC). Пусть окружность (A_1BC) вторично пересекает окружность (AB_1C) в точке P (которая, очевидно, лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$). Тогда $\angle APC = \angle AB_1C$ и $\angle BPC = \angle BA_1C$. Поскольку также $\angle APB + \angle BPC + \angle APC = 360^\circ = \angle AB_1C + \angle AC_1B + \angle BA_1C$ (второе равенство — сумма внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$), то $\angle APB = \angle AC_1B$. Таким образом, точка P лежит и на окружности (AC_1B).

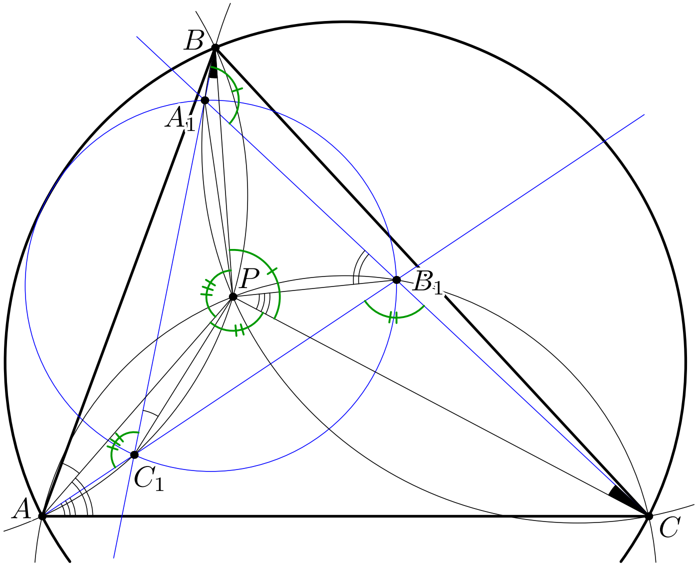

Рис. 5

Сделаем инверсию с центром в точке P (и с произвольным радиусом), образы точек будем обозначать теми же буквами со штрихами. Напомним, что для любых точек X и Y треугольники XPY и $Y'PX'$ подобны (по углу и отношению заключающих сторон), поэтому $\angle X'Y'P = \angle PXY$.

Докажем, что треугольник $A_1'B_1'C_1'$ подобен треугольнику ABC. Действительно, $\angle B_1'A_1'C_1' = \angle B_1'A_1'P + \angle PA_1'C_1' = \angle PB_1A_1 + \angle A_1C_1P = \angle PAC + \angle BAP = \angle BAC$, аналогично для остальных углов.

Окружность (CPA_1B) при инверсии перейдет в прямую $C'B'$, проходящую через вершину A_1' треугольника $A_1'B_1'C_1'$. Найдем угол между этой прямой и стороной $A_1'B_1'$: $\angle B'A_1'B_1' = \angle PA_1'B_1' - \angle PA_1'B' = \angle A_1B_1P - \angle A_1BP = \angle A_1B_1P - \angle A_1CP = \angle CPB_1 = \angle CAB_1$. Вместе с двумя аналогичными равенствами отсюда следует, что в подобных треугольниках ABC и $A_1'B_1'C_1'$ красные лучи в первом и лучи $A_1'B', B_1'C', C_1'A'$ во втором — соответствующие элементы. Окружности $(A_1'B_1'C_1')$ и $(A'B'C')$ касаются (поскольку они получены инверсией из касающихся окружностей), а тогда и окружность (ABC) касается описанной окружности треугольника, ограниченного красными лучами, что и требовалось.

Замечание. Из решения следует более общий факт: углы между окружностью (ABC) и окружностями, описанными около красного и синего треугольника, одинаковы.

Второе решение. Обозначим треугольник, образованный красными лучами, через $A_0B_0C_0$, а треугольник, образованный синими — $A_1B_1C_1$ (обозначения введем как на рисунке) Для определенности будем считать, что именно окружность $(A_1B_1C_1)$ касается окружности (ABC), а доказать нужно то же про окружность $(A_0B_0C_0)$.

Без ограничения общности можно считать, что точка C_1 лежит на отрезке AB_1. По условию $\angle BAC_1 = \angle CAC_0$ и $\angle ABC_1 = \angle CBC_0$. Следовательно, точки C_0 и C_1 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Аналогично, изогонально сопряжены точки A_0 и A_1, B_0 и B_1.

Обозначим через i композицию инверсии с центром в точке B с радиусом $\sqrt{AB \cdot BC}$ и симметрии относительно биссектрисы угла ABC. Тогда преобразование i меняет местами точки A и

C. Образы точек A_0, B_0 и C_0 нам поможет описать следующее вспомогательное утверждение.

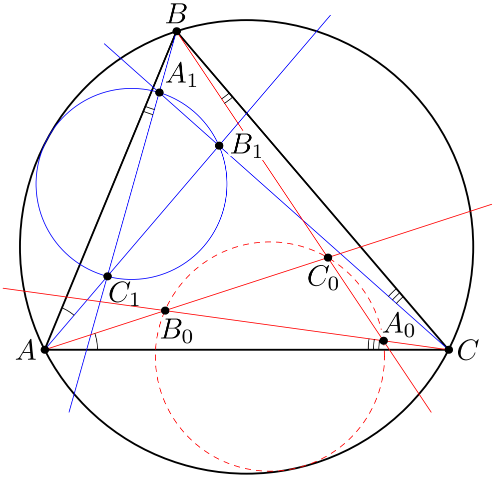

Рис. 6

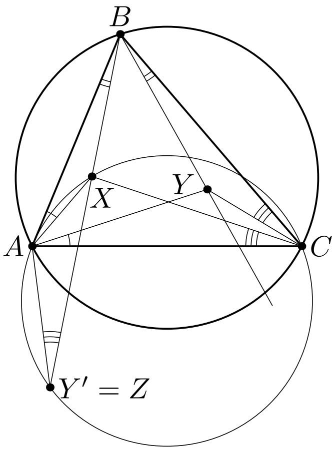

Рис. 7

Лемма. *Пусть точки X и Y изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Пусть прямая BX вторично пересекает окружность, описанную около треугольника AXC, в точке Z. Тогда $i(Y) = Z$.*

Доказательство. Пусть $i(Y) = Y'$. Поскольку $i(C) = A$, то треугольники BCY и $BY'A$ подобны, в частности, $\angle CBY = \angle ABY'$, откуда следует, что точка Y' лежит на продолжении отрезка BX за точку X. А также $\angle AY'X = \angle AY'B = \angle BCY = \angle ACX$, поэтому точка Y' лежит на окружности (AXC). Значит, $Y' = Z$, лемма доказана. □

Вернёмся к решению задачи. Пусть прямая BA_1 вторично пересекает окружность (AA_1C) в точке A_2, прямая BB_1 окружность (AB_1C) — в точке B_2, прямая BC_1 окружность (AC_1C) — в точке C_2. Тогда, согласно лемме, $i(A_0) = A_2$, $i(B_0) = B_2$, $i(C_0) = C_2$. Кроме того, i переводит окружность (ABC) в прямую AC. Следовательно, достаточно доказать, что прямая AC касается окружности $(A_2B_2C_2)$.

В силу вписанности четырёхугольников AB_1CB_2 и AA_1CA_2 мы получаем, что $\angle AB_2B = \angle ACB_1 = \angle ACA_1 = \angle AA_2B$, поэтому четырёхугольник ABB_2A_2 вписанный. Аналогично четырёхугольник BCB_2C_2 тоже вписанный.

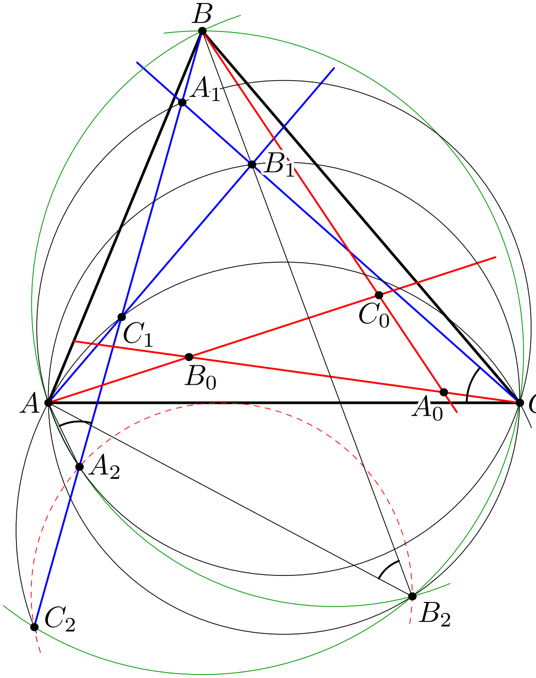

Рис. 8

Сделаем инверсию j с центром в точке A (и произвольным радиусом). Образы точек будем обозначать теми же буквами со штрихами.

Поскольку точка C_1 лежит на отрезке AB_1, то точка C_1' лежит на продолжении отрезка AB_1', при этом и точка B_1', и точка C_1' расположены в угле $B'AC'$, но вне треугольника $AB'C'$. Точка A_1' лежит внутри угла $B'AB_1'$ и вне треугольника $AB'C'$. Поскольку точки C, B_1, A_1 лежат на одной прямой, точка A_1' лежит на окружности $(AC'B_1')$. В частности, она расположена внутри угла $B'C'B_1'$.

Точки C_2', A_2', B_2' расположены в другой полуплоскости относительно прямой AC', нежели точка B'. Кроме того, поскольку четырёхугольники AB_1CB_2, AA_1CA_2, AC_1CC_2 и ABB_2A_2 вписанные, то точка C' лежит на отрезках $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$, $C_1'C_2'$, а точка B'_2 — на отрезке $B'A'_2$. Поскольку окружности $(A_1B_1C_1)$ и (ABC) касаются, то окружность $(A'_1B'_1C'_1)$, обозначим ее через ω_1, касается прямой $B'C'$. Также четырёхугольники $AC'B'_1A'_1$, $B'C'B'_2C'_2$ и шестиугольник $AB'A'_1C'_1A'_2C'_2$ все вписанные, поскольку точка точка B_1 лежит на отрезке CA_1, четырёхугольник BCB_2C_2 вписанный, а также точки B, A_1, C_1, A_2, C_2 лежат на одной прямой именно в таком порядке.

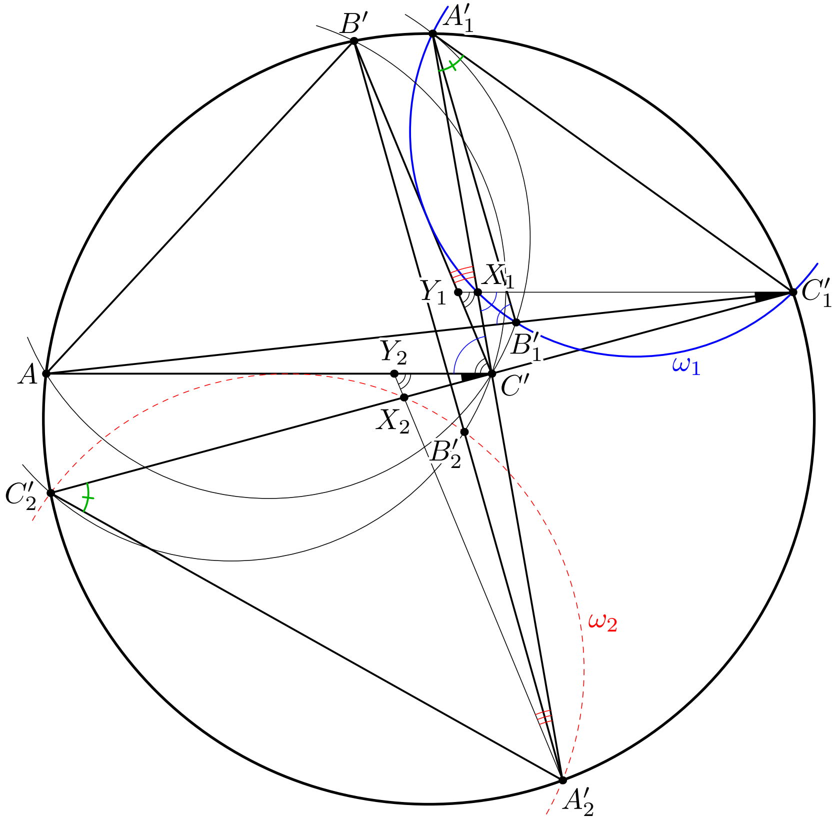

Рис. 9

Теперь достаточно доказать, что окружность $(A'_2B'_2C'_2)$, обозначим ее через ω_2, касается прямой AC', потому что это означает, что до инверсии касались окружности (ABC) и $(A_2B_2C_2)$.

Проведем через точку C'_1 прямую параллельно AC' и обозначим ее точки пересечения с прямыми $C'A'_1$ и $C'B'$ через X_1

и Y_1 соответственно. Через точку A_2' проведем прямую параллельно $B'C'$ и обозначим ее точки пересечения с прямыми $C'C_2'$ и $C'A$ через X_2 и Y_2 соответственно.

Четырёхугольник $AC'B_1'A_1'$ вписанный, а также $X_1C_1' \parallel \parallel AC'$. Значит, $\angle AB_1'A_1' = \angle AC'A_1' = \angle C'X_1C_1'$. Следовательно, точка X_1 лежит на окружности ω_1. Аналогично точка X_2 лежит на ω_2.

Пусть π_1 — полуплоскость, ограниченная прямой X_1C_1', в которой лежит точка C'. Аналогично π_2 — полуплоскость, в которой лежит точка C', ограниченная прямой $A_2'X_2$. Обозначим через τ преобразование подобия, которое переводит точку C_1' в точку A_2', точку X_1 в точку X_2, а также полуплоскость π_1 в полуплоскость π_2. (Такое преобразование подобия можно получить, например, как композицию поворотной гомотетии, переводящей X_1 в X_2 и C_1' в A_2', и симметрии относительно прямой X_2A_2').

Четырёхугольник $A_1'C_1'A_2'C_2'$ вписанный, поэтому $\angle A_2'C_2'C' = \angle C_1'A_1'C'$. Следовательно, преобразование τ переводит окружность ω_1 в окружность ω_2. Далее мы докажем, что, во-первых, $X_1Y_1/Y_1C_1' = X_2Y_2/Y_2A_2'$ ($\star$) и, во-вторых, $\angle A_2'Y_2C' = \angle C_1'Y_1C'$ ($\star\star$). Отсюда последует, что τ переводит точку Y_1 в точку Y_2, а также прямую Y_1C' в прямую Y_2C'. Таким образом, поскольку прямая $C'Y_1'$ касается окружности ω_1, то прямая $C'Y_2'$, касается окружности ω_2, что и требовалось.

Остается доказать соотношения ($\star$) и ($\star\star$). В силу параллельности X_2Y_2 и $B'C'$, а также X_1Y_1 и AC' имеем, что $\angle X_2Y_2C' = \angle AC'B' = \angle X_1Y_1C'$, откуда следует ($\star\star$). Кроме того, $\angle Y_1C_1'C' = \angle Y_2C'X_2$ и $\angle Y_1C'X_1 = \angle Y_2A_2'C'$, поэтому треугольник $Y_2C'X_2$ подобен треугольнику $Y_1C_1'C'$ по двум углам, а треугольник Y_1X_1C' — треугольнику $Y_2C'A_2'$. Следовательно, $\dfrac{Y_2X_2}{Y_2C'} = \dfrac{Y_1C'}{Y_1C_1'}$ и $\dfrac{Y_2A_2'}{Y_2C'} = \dfrac{Y_1C'}{Y_1X_1}$. Разделив первое полученное равенство на второе, мы получаем в точности соотношение ($\star$).

Отметим, что точки X_1 и X_2 могут располагаться на продолжениях отрезков $C'A_1'$ и $C'C_2'$ (за точки A_1' и C_2'), но на решение это не влияет.