Материалы для проведения заключительного этапа

XLIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2022–2023 учебный год

Второй день

Сириус, 21–27 апреля 2023 г.

Москва, 2023

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также А. В. Антропов, Д. Ю. Бродский, Д. А. Демин, М. А. Дидин, И. А. Ефремов, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, Е. Г. Молчанов, А. В. Пастор, Д. А. Терешин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Если на столе лежит несколько кучек камней, считается, что на столе *много камней*, если можно найти 50 кучек и пронумеровать их числами от 1 до 50 так, что в первой кучке есть хотя бы один камень, во второй — хотя бы два камня, ..., в пятидесятой — хотя бы пятьдесят камней. Пусть исходно на столе лежат 100 кучек по 100 камней в каждой. Найдите наибольшее $n \leqslant 10\,000$ такое, что после удаления из исходных кучек любых n камней на столе всё равно останется много камней. (При удалении камней кучка не распадается на несколько.) (*Д. Храмцов*)

Ответ. $n = 5099$.

Решение. Если удалить полностью 51 кучку, то, очевидно, не останется много камней. Значит, искомое значение n меньше 5100. (Альтернативно, можно удалить из всех кучек по 51 камню.)

Осталось показать, что при удалении любых $n = 5099$ камней останется много камней. Пусть в кучках осталось a_1, a_2, ..., a_{100} камней соответственно; можно считать, что $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant a_{100} \leqslant 100$. Покажем, что $a_{i+50} \geqslant i$ при $i = 1, 2, \ldots, 50$, то есть кучки с номерами от 51 до 100 удовлетворяют требованиям.

Пусть это не так, то есть $a_{i+50} \leqslant i-1$. при некотором $i \leqslant 50$. Это значит, что каждая из первых $i + 50$ кучек содержит не более $i-1$ камня, то есть из неё удалено хотя бы $101-i$ камней. Поэтому общее количество удалённых камней не меньше, чем $(i + 50)(101 - i) = 5100 - (i - 1)(i - 50) \geqslant 5100$. Противоречие.

9.6. Рассмотрим все 100-значные числа, делящиеся на 19. Докажите, что количество таких чисел, не содержащих цифр 4, 5 и 6, равно количеству таких чисел, не содержащих цифр 1, 4 и 7.

(*И. Ефремов*)

Решение. Каждому остатку a от деления на 19 сопоставим остаток $b(a)$ такой, что $b(a) \equiv 3a \pmod{19}$. Заметим, что остаткам $0, 1, 2, 3, 7, 8, 9$ сопоставлены остатки $0, 3, 6, 9, 2, 5, 8$ соответственно. Более того, по остатку b восстанавливается остаток $a = a(b) \equiv -6b \pmod{19}$ такой, что $a(b(a)) \equiv -18a \equiv a \pmod{19}$ и $b(a(b)) = b$ (из аналогичных соображений).

Обозначим теперь через $\mathcal{A}$ множество чисел из условия, не содержащих цифр $4, 5, 6$, а через $\mathcal{B}$ — множество таких чисел, не содержащих $1, 4, 7$. Каждому числу $A = \overline{a_{99}a_{98}\ldots a_0} \in \mathcal{A}$ сопоставим число $B = \overline{b(a_{99})b(a_{98})\ldots b(a_0)}$. Заметим, что $b(a_i)$ — цифра (причём $b(a_{99}) \neq 0$), так что получилось 100-значное число. Кроме того,

$$B = b_0 + 10b_1 + \ldots + 10^{99}b_{99} \equiv \\ \equiv 3(a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^{99}a_{99}) = 3A \pmod{19},$$

так что B делится на 19 и $B \in \mathcal{B}$. Поскольку разным числам из $\mathcal{A}$ соответствуют разные числа из $\mathcal{B}$, количество чисел в $\mathcal{B}$ не меньше, чем в $\mathcal{A}$.

Наконец, каждому числу $B = \overline{b_{99}b_{98}\ldots b_0} \in \mathcal{B}$ соответствует число $A = \overline{a(b_{99})a(b_{98})\ldots a(b_0)}$, которое по аналогичным причинам лежит в $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что количества чисел в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равны.

9.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD, пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD, пересекаются в точке F. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая EC повторно пересекает окружность (ABC) в точке X, а прямая EA повторно пересекает окружность (ACD) в точке Y (мы разберём расположение точек, указанное на рис. 1; другие случаи рассматриваются аналогично).

Рассмотрим гомотетию с центром E, переводящую (ABC) в (ACD). При такой гомотетии точка X переходит в C, а точка A — в Y. Отсюда $AX \parallel YC$ и $\angle AEC = \angle AYC - \angle ECY = \angle AYC - \angle AXC$.

Но $\angle AXC = 180^\circ - \angle ABC$ и $\angle AYC = 180^\circ - \angle ADC$. Значит, $\angle AEC = \angle ABC - \angle ADC = \angle ABC - \angle BCG = \angle BGC$. Из

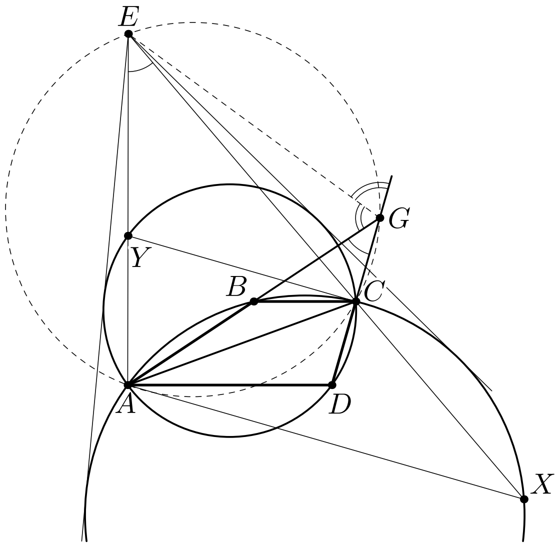

Рис. 1

полученного равенства следует, что точки A, C, E, G лежат на одной окружности.

Поскольку точка E лежит на серединном перпендикуляре к AC (т. е. на оси симметрии окружностей (ABC) и (ACD)), она является серединой дуги AGC окружности $(ACEG)$. Значит, E лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Аналогично показывается, что F также лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Замечание. У задачи есть следующее обобщение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, $G = AB \cap CD$, а M — вторая точка пересечения окружностей (ADG) и (BCG) (иначе говоря, *точка Микеля* этого четырёхугольника). Пусть E — центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей (ABC) в (ADC). Тогда точки A, C, M, E лежат на одной окружности, причём E — середина дуги AC (т. е. ME — биссектриса угла между AM и CM).

Доказать это можно аналогично решению решении задачи: имеем (в направленных углах) $\angle AEC = \angle ABC + \angle ADC = \angle GBC + \angle AMG = \angle GMC + \angle AMG = \angle AMC$.

9.8. У Пети есть 10 000 гирь, среди них нет двух гирь равного веса.

Также у него есть чудо-прибор: если положить в него 10 гирь, он сообщит сумму весов каких-то двух из них (при этом неизвестно, каких именно). Докажите, что Петя может использовать чудо-прибор так, чтобы через некоторое время указать на одну из гирь и точно назвать её вес. (В чудо-прибор нельзя класть другое количество гирь.) (*С. Берлов, Т. Коротченко*)

Решение. Покажем, что Петя сможет определить вес одной гири, даже если у него 8 000 гирь. Положим $n = 4\,000$.

Лемма. *Для любых n гирь Петя может найти две гири, для которых он знает их суммарный вес.*

Доказательство. Пусть Петя положит в прибор по очереди все возможные наборы из 10 гирь из наших n. Заметим, что каждое показание прибора — это вес какой-то из C_n^2 пар гирь (будем говорить, что это показание *использует* эту пару). В то же время, Петя получит C_n^{10} показаний. Значит, одна из пар будет использована хотя бы

$$D = \frac{C_n^{10}}{C_n^2} = \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-9)}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 10}$$

раз.

Иначе говоря, найдутся D измерений таких, что (1) в них прибор показывает один и тот же вес S, и (2) во всех десятках, использованных в этих испытаниях, есть две общих гири a и b. Мы покажем, что при выполнении условий (1) и (2) суммарный вес a и b обязательно равен S, то есть вес этой пары Петя и сможет определить по показаниям прибора. Назовём десятки гирь, участвовавшие в этих D измерениях, *нужными.*

Предположим противное: сумма весов a и b не равна S. Рассмотрим все пары из n гирь, суммарные веса в которых равны S (назовём эти пары *хорошими*). Поскольку веса всех гирь различны, хорошие пары не пересекаются; в частности, их не больше, чем $n/2$. При этом в каждой нужной десятке есть не только гири a и b, но и хотя бы одна хорошая пара. Оценим теперь общее количество нужных десяток.

Пусть в нужной десятке хорошая пара не содержит ни a, ни b. Любую такую десятку можно получить, добавив к гирям a и b хорошую пару (не более чем $(n-2)/2$ способами), а затем дополнив шестью из оставшихся $n-4$ гирь. Итого, количество таких десяток не больше, чем $\frac{n-2}{2}\,C_{n-4}^{6}$.

Во всех остальных нужных десятках хорошая пара содержит либо a, либо b. Если есть хорошая пара, содержащая a, то такая пара единственна. Для получения нужной десятки, содержащей эту пару, её надо дополнить гирей b и ещё семью гирями из оставшихся $n-3$; итого, таких нужных десяток не больше C_{n-3}^{7}. Аналогично, нужных десяток, содержащих хорошую пару с гирей b, тоже не больше C_{n-3}^{7}.

Итого, получаем

$$D \leqslant \frac{n-2}{2}\,C_{n-4}^{6} + 2C_{n-3}^{7} = \\ = D \cdot \left(\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4(n-3)} + \frac{8\cdot 9\cdot 10}{n-2}\right) < D\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = D.$$

Противоречие. □

Завершим решение задачи. Построим следующий граф. Сопоставим каждой гире вершину, Среди каждых n гирь найдём одну пару с известной суммой; две соответствующих вершины соединим ребром. Если в этом графе нет нечётных циклов, то, как известно, его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждое ребро соединяло вершины разных цветов. Но тогда вершин одного цвета не меньше n, и потому среди них мы провели ребро; противоречие.

Значит, в полученном графе есть цикл $w_1, w_2, \ldots, w_{2k+1}$, и Петя знает суммарные веса всех пар соседних гирь в этом цикле. Взяв полусумму всех этих весов, Петя узнаёт суммарный вес всех гирь цикла. Вычтя из него $(w_2+w_3)+(w_4+w_5)+\ldots+ +(w_{2k}+w_{2k+1})$, он узнает вес гири w_1.

Замечание. Оценивая чуть точнее, можно доказать лемму даже при $n = 2\,000$.

10 класс

10.5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого произведение чисел n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+20$ делится на квадрат какого-то одного из них. (*А. Храбров*)

Ответ. 20!.

Решение. При $n = 20!$ имеем $\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+20)}{n^2} = \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+20)}{20!} = C_{n+20}^{20}$ — целое число.

Пусть теперь $n > 20!$ и пусть $P = n(n+1)(n+2)\ldots(n+20)$ делится на k^2, где $k = n+i$, $i \in \{0,1,2,\ldots,20\}$. Имеем $P/k = (k-i)(k-i+1)\ldots(k-1)(k+1)(k+2)\ldots(k+j)$, где $j = 20-i$. Заметим, что число $P/k \equiv (-1)^i i!j! \pmod k$ должно делиться на k. Но $0 < i!j! \leqslant i!\cdot(i+1)(i+2)\ldots(i+j) = 20! < n \leqslant k$, значит, $i!j!$ не делится на k. Противоречие.

10.6. Квадрат 100×100 разбит на квадраты 2×2. Потом его разбивают на доминошки (прямоугольники 1×2 и 2×1). Какое наименьшее количество доминошек могло оказаться внутри квадратов разбиения? (*С. Берлов*)

Ответ. 100.

Решение. *Пример.* Верхнюю и нижнюю горизонтали разобьём на горизонтальные доминошки — они окажутся в квадратах 2×2. Остальной прямоугольник 98×100 разобьём на вертикальные доминошки — они не окажутся в квадратах 2×2.

Оценка. Рассмотрим квадраты A_1, A_3, $\ldots$, A_{99} размеров 1×1, 3×3, $\ldots$, 99×99, у которых левый нижний угол совпадает с левым нижним углом исходного квадрата 100×100. Для каждого из квадратов A_i $(i = 1,3,5,\ldots,99)$ найдётся доминошка X_i, пересекающая его сторону (поскольку квадраты нечётной площади не разбиваются на доминошки). Легко видеть, что X_i лежит внутри квадратика 2×2 из разбиения.

Аналогично, рассматривая квадраты B_1, B_3, $\ldots$, B_{99} размеров 1×1, 3×3, $\ldots 99\times99$, у которых правый верхний угол совпадает с правым верхним углом исходного квадрата 100×100, находим ещё 50 нужных нам доминошек Y_j $(j = 1,3,5,\ldots,99)$.

Это завершает решение (очевидно, что все доминошки X_1, X_3, $\ldots$, X_{99}, Y_1, Y_3, $\ldots$, Y_{99} различны).

Замечание. Приведем схему несколько другого доказательства оценки.

Пусть внутри квадратов 2×2 оказалось не более 99 доминошек.

Проведём 50 вертикальных линий сетки v_1, v_3, v_5, $\ldots$, v_{99} так, что v_i отделяет i столбцов слева. Легко видеть, что любая доминошка, пересекаемая одной из линий v_1, v_3, v_5, $\ldots$, v_{99}, нам подходит. Каждая вертикальная линия пересекает чётное количество доминошек, так как слева от этой линии чётное количество клеток. Значит, среди линий v_1, v_3, v_5, $\ldots$, v_{99} есть линия v_i, не пересекающая доминошек, иначе мы уже нашли хотя бы $2 \cdot 50 = 100$ нужных нам доминошек. Проведём аналогичное рассуждение для 50 горизонтальных линий сетки h_1, h_3, h_5, $\ldots$, h_{99} и найдём среди них линию h_j, не пересекающую доминошек. Но v_i и h_j делят доску на области с нечётным количеством клеток, поэтому хотя бы одна из этих двух линий обязана пересекать доминошку. Противоречие.

10.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD, пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD, пересекаются в точке F. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая EC повторно пересекает окружность (ABC) в точке X, а прямая EA повторно пересекает окружность (ACD) в точке Y (мы разберём расположение точек, указанное на рис. 2; другие случаи рассматриваются аналогично).

Рассмотрим гомотетию с центром E, переводящую (ABC) в (ACD). При такой гомотетии точка X переходит в C, а точка A — в Y. Отсюда $AX \parallel YC$ и $\angle AEC = \angle AYC - \angle ECY = \angle AYC - \angle AXC$.

Но $\angle AXC = 180^\circ - \angle ABC$ и $\angle AYC = 180^\circ - \angle ADC$. Значит, $\angle AEC = \angle ABC - \angle ADC = \angle ABC - \angle BCG = \angle BGC$. Из полученного равенства следует, что точки A, C, E, G лежат на одной окружности.

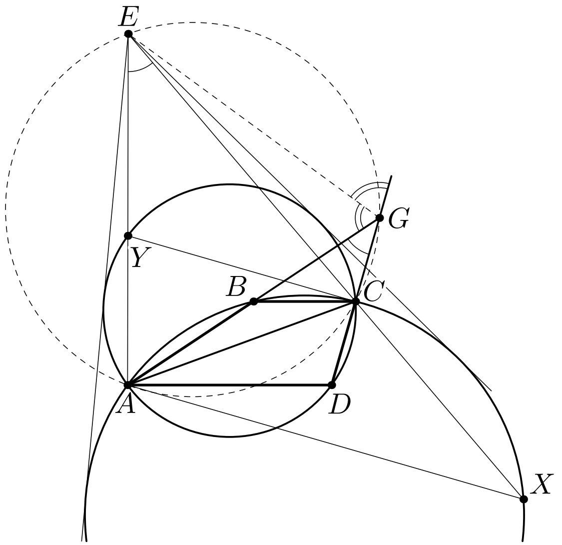

Рис. 2

Поскольку точка E лежит на серединном перпендикуляре к AC (т. е. на оси симметрии окружностей (ABC) и (ACD)), она является серединой дуги AGC окружности $(ACEG)$. Значит, E лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Аналогично показывается, что F также лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Замечание. У задачи есть следующее обобщение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, $G = AB \cap CD$, а M — вторая точка пересечения окружностей (ADG) и (BCG) (иначе говоря, *точка Микеля* этого четырёхугольника). Пусть E — центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей (ABC) в (ADC). Тогда точки A, C, M, E лежат на одной окружности, причём E — середина дуги AC (т. е. ME — биссектриса угла между AM и CM).

Доказать это можно аналогично решению решении задачи: имеем (в направленных углах) $\angle AEC = \angle ABC + \angle ADC = \angle GBC + \angle AMG = \angle GMC + \angle AMG = \angle AMC$.

10.8. Дано число $a \in (0, 1)$. Положительные числа x_0, x_1, …, x_n удовлетворяют условиям $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = n + a$ и $\dfrac{1}{x_0} + \dfrac{1}{x_1} +$

$+\ldots+\dfrac{1}{x_n}=n+\dfrac{1}{a}$. Найдите наименьшее значение выражения $x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2$. *(А. Храбров)*

Ответ. $n+a^2$.

Решение. Заметим, что равенство достигается при $x_0=a$ и $x_1=\ldots=x_n=1$.

Запишем $\sum x_k^2=\sum(1-x_k)^2+2\sum x_k-(n+1)=\sum(1-x_k)^2+$ $+n-1+2a$. Достаточно доказать, что $\sum(1-x_k)^2\geqslant(1-a)^2$. Пусть x_0 — наименьшее из чисел.

При $x_0\leqslant a$ имеем $\sum(1-x_k)^2\geqslant(1-x_0)^2\geqslant(1-a)^2$.

Если же $x_0\geqslant a$, то $\sum(1-x_k)^2=\sum x_k\left(\dfrac{1}{x_k}-2+x_k\right)$, что, поскольку выражения в скобках неотрицательны, не меньше, чем $a\sum\left(\dfrac{1}{x_k}-2+x_k\right)=a\left(n+\dfrac{1}{a}-2(n+1)+n+a\right)=$ $=a\left(\dfrac{1}{a}-2+a\right)=(a-1)^2$.

11 класс

11.5. Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша? (*Г. Никитин*)

Ответ. Побеждает Гриша.

Решение. Заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$. Гриша разобьёт числа на доске на две группы по 5 и будет возводить в квадрат числа из первой группы и из второй группы по очереди. Легко видеть, что квадраты целых чисел, не кратных 7, при делении на 7 могут давать лишь остатки 1, 2 и 4. Следовательно, после увеличения максимум на 2 числа на доске будут давать при делении на 7 только остатки 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Значит, ни одно из чисел не будет делиться 7, а поэтому не будет делиться и на 2023.

Замечание. Существуют и другие решения.

11.6. Плоскость α пересекает рёбра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках X, Y, Z и T соответственно. Оказалось, что точки Y и T лежат на окружности ω, построенной на отрезке XZ как на диаметре. Точка P отмечена в плоскости α так, что прямые PY и PT касаются окружности ω. Докажите, что середины рёбер AB, BC, CD, DA и точка P лежат в одной плоскости. (*А. Кузнецов*)

Решение. Из условия задачи мы сразу получаем, что $\angle XYZ = 90^\circ = \angle XTZ$. Обозначим через Q точку пересечения прямых XY и ZT, через R — точку пересечения прямых ZY и XT (см. рис. 3). Без ограничения общности можно считать, что точка Z лежит на отрезках RY и QT. Поскольку точка R лежит и в плоскости ABD, и в плоскости BCD, то она лежит на прямой BD. Аналогично, точка Q лежит на прямой AC.

Заметим, что RY и QT — высоты треугольника XQR. Тогда Z — точка пересечения высот этого треугольника, и по-

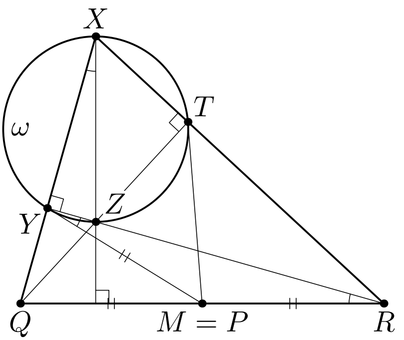

Рис. 3

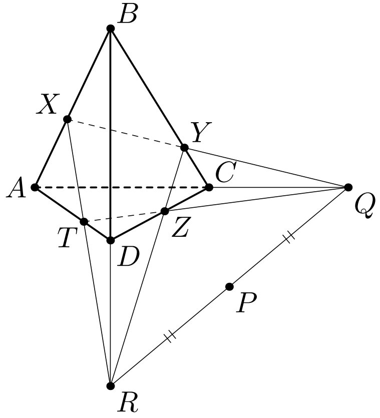

Рис. 4

этому $XZ \perp QR$. Пусть M — середина отрезка QR. Поскольку $\angle QYR = 90^\circ$, то $YM = MR = RQ$ по свойству медианы прямоугольного треугольника. Значит, $\angle MYR = \angle YRQ = 90^\circ - \angle XQR = \angle ZXQ$. Следовательно, прямая YM касается окружности ω. Аналогично, прямая TM тоже касается окружности ω, поэтому точки M и P совпадают.

Рассмотрим две параллельные плоскости β и γ, одна из которых содержит отрезок AC, а другая — отрезок BD. Заметим, что середины всех отрезков, соединяющих точку из плоскости β и точку из плоскости γ, лежат в одной плоскости, параллельной β и γ. Действительно, если ввести декартовы координаты так, что одна из плоскостей задаётся уравнением $z = 0$, а другая — уравнением $z = h$ (где h есть расстояние между плоскостями β и γ), то середины всех рассматриваемых отрезков лежат в плоскости $z = h/2$. Применяя это наблюдение для отрезков AB, BC, CD, DA, QR, мы получаем, что их середины лежат в одной плоскости, что и требовалось.

11.7. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом k. Пусть $P(x)$ — бицелозначный многочлен степени d, и пусть N_d — произведение всех составных чисел, не превосходящих d (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый. (*И. Богданов, Г. Челноков*)

Решение. Многочлен $P(x)$ называется *целозначным*, если

$P(k)$ — целое число при любом целом k. Нам надо доказать, что, если многочлены $P(x)$ и $P'(x)$ целозначны, причём степень $P(x)$ равна d, то старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый.

Лемма. *Пусть $P(x)$ — целозначный многочлен степени d. Тогда все коэффициенты многочлена $d! \cdot P(x)$ целые.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} P(i) \cdot \frac{(x-0)(x-1)\dots(x-(i-1))(x-(i+1))\dots(x-d)}{(i-0)(i-1)\dots(i-(i-1))(i-(i+1))\dots(i-d)}.$$

Его степень не больше d, и его значения совпадают с соответствующими значениями $P(x)$ в точках $x = 0, 1, 2, \dots, d$. Это означает, что многочлен $P(x) - Q(x)$ имеет степень не выше d, а также обнуляется в $d+1$ точке. Поэтому он нулевой, то есть $P(x) = Q(x)$. (Формула выше — это частный случай *интерполяционной формулы Лагранжа.*)

Осталось заметить, что в формуле выше в i-м слагаемом знаменатель равен $(-1)^{d-i} i!(d-i)!$; это число делит $d!$, поскольку $\frac{d!}{i!(d-i)!} = C_d^i$. Значит, при умножении каждого слагаемого на $d!$ получается многочлен с целыми коэффициентами. $\square$

Перейдём к решению задачи. Индукция по d. База при $d = 0$ тривиальна. Для перехода индукции рассмотрим бицелозначный многочлен $P(x)$ степени d; пусть его старший коэффициент равен a.

Если d не является простым числом, то $N_d = dN_{d-1}$. Заметим, что многочлен $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$ также бицелозначный, имеет степень $d-1$ и старший коэффициент ad. По предположению индукции, число $N_{d-1} \cdot ad = N_d a$ является целым, что и требовалось доказать.

Пусть теперь d — простое число; тогда $N_d = N_{d-1}$, и то же рассуждение даёт, что число $dN_d a$ является целым. Предположим, что $N_d a$ — нецелое число; тогда знаменатель числа a (в несократимой записи) делится на простое число d.

Заметим, что сумма всех коэффициентов многочлена $P(x)$ — это целое число $P(1)$. Поскольку знаменатель числа a делится на d, среди коэффициентов многочлена $P(x)$ найдётся ещё один, у которого знаменатель делится на d; пусть это коэффициент b при x^i, $i < d$. Заметим, что $i > 0$, так как число $P(0)$ целое.

Но тогда у целозначного многочлена $P'(x)$ коэффициент при x^{i-1} равен ib и также имеет знаменатель, кратный d. Поскольку d — простое число, отсюда вытекает, что коэффициент при x^{i-1} у многочлена $(d-1)!P'(x)$ нецелый, что противоречит лемме.

Замечание 1. Случай простого d можно разобрать и другими способами. Приведём один из них.

Предположим, что число $dN_d a$ целое, а $N_d a$ — нет, так что $N_d a = t/d$ для некоторого целого t, не кратного d. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = N_d P(x) - N_d a \cdot (x-1)(x-2)\ldots(x-d). \qquad (*)$$

Он целозначен, поскольку при любом целом k число $(k-1)(k-2)\ldots(k-d)$ делится на $d!$. Кроме того, его степень меньше d. Из леммы вытекает, что знаменатели коэффициентов многочлена $Q(x)$ не делятся на d.

Рассмотрим теперь целое число $c = N_d P'(d)$. Из формулы $(*)$ нетрудно получить, что

$$c = Q'(d) + \frac{t}{d} \cdot (d-1)(d-2)\ldots(d-(d-1)).$$

При этом первое слагаемое — это несократимая дробь со знаменателем, не делящимся на d, а второе — с делящимся. Это невозможно для целого c.

Замечание 2. Как доказали D. Brizolis и E. G. Straus, наименьшее N, для которого старший коэффициент многочлена $NP(x)$ обязательно целый, равно $d!\prod_p p^{-k(p,d)}$, где произведение берётся по всем простым p, а $k(p,d)$ — это наибольшее целое неотрицательное число k, для которого верно неравенство $kp^k - (k-1)p^{k-1} \leqslant d$.

11.8. В стране N городов. В ней действует $N(N-1)$ дорог с односторонним движением: по одной дороге из X в Y для каждой упорядоченной пары городов $X \neq Y$. У каждой дороги есть цена её обслуживания. Для данного $k = 1, \ldots, N$ рассмотрим все способы выделить k городов и $N-k$ дорог так, чтобы из каждого города можно было попасть в какой-то выделенный город, пользуясь только выделенными дорогами. Такую систему городов и дорог с наименьшей суммарной стоимостью обслуживания назовём *k-оптимальной.* Докажите, что города можно пронумеровать от 1 до N так, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, N$ существует k-оптимальная система дорог с выделенными городами $1, 2, \ldots, k$. (*В. Буслов*)

Решение. Рассматриваемые сети из $N - k$ дорог называем далее *k-сетями.* Рассмотрим неориентированный граф, образованный дорогами k-сети. В нём не более чем k компонент связности, поскольку в каждой есть выделенный город. С другой стороны, компонент не менее k, поскольку рёбер всего не более чем $N - k$. Поэтому компонент ровно k, каждая из них есть дерево, содержит единственный выделенный город и — вспоминая про ориентацию — рёбра каждого дерева направлены по направлению к выделенному городу. В частности, из каждого не выделенного города должна выходить ровно одна дорога, а из выделенного 0 дорог.

Рассмотрим $(k+1)$-оптимальную сеть A с выделенными городами $y_0, y_1, \ldots, y_k$ и k-оптимальную сеть B с выделенными городами $x_1, \ldots, x_k$. Не умаляя общности, ни из одного x_i нельзя добраться в сети A до города y_0. Пусть U — множество городов, из которых в A можно добраться до y_0, а α, β — множества дорог, выходящих из U в сетях A, B соответственно. Имеем $|\alpha| = |U| - 1$, $|\beta| = |U|$.

Рассмотрим сеть $D := (A \setminus \alpha) \cup \beta$. Утверждается, что это k-сеть для выделенных городов $y_1, \ldots, y_k$. В самом деле, число дорог в ней равно $|D| = N - k - 1 - (|U| - 1) + |U| = N - k$. Из каждого города, кроме $y_1, \ldots, y_k$ выходит ровно одна дорога. Выезжая из любого города вне U и используя дороги сети, мы по-прежнему можем попасть в один из городов $y_1, \ldots, y_k$. Выезжая из города в U, мы либо попадаем вне U — и далее в один из городов $y_1, \ldots, y_k$, — либо зацикливаемся в U. Но тогда β содержит цикл, что невозможно.

Рассмотрим сеть $C := (B \setminus \beta) \cup \alpha$. Утверждается, что это $(k+1)$-сеть для выделенных городов $x_1, \ldots, x_k, y_0$. В самом деле, $|C| = n - k - 1$, и выезжая из любого города по дорогам сети C, мы либо попадаем в U — и тогда по α доезжаем до y_0, — либо ни разу не попадаем в U и тогда доезжаем до одного из городов $x_1, \ldots, x_k$.

Итак, C, D — k-сеть и $(k+1)$-сеть. Сумма их стоимостей такая же, как у A и B. Значит, они обе оптимальны. Таким образом, для сети A удалось выкинуть выделенный город и найти оптимальную k-сеть с оставшимися выделенными городами. Теперь можно построить требуемую нумерацию в обратном порядке (начиная с пустой N-сети).