9 класс

Первый день

9.1. Даны два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$; известно, что трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ имеют по два корня. Оказалось, что разность корней трёхчлена $f(x)$ равна разности корней трёхчлена $g(x)$. Докажите, что разность корней трёхчлена $f(x)+g(x)$ не больше этих разностей. (В каждой разности из большего корня вычитается меньший.)

9.2. Изначально в строку выписывают 250 букв — 125 букв А и 125 букв Б в некотором порядке. Затем за одну операцию можно взять любой кусок из нескольких подряд стоящих букв, среди которых поровну букв А и Б, и переставить буквы в этом куске в обратном порядке, поменяв в этом куске все буквы А на буквы Б и буквы Б на буквы А. (Например, из строки $\text{А}\underbrace{\text{БАББАА}}\text{Б}$ можно одной операцией получить строку $\text{А}\underbrace{\text{ББААБА}}\text{Б}$.) Можно ли выписать исходную строку и совершить несколько операций так, чтобы в результате на доске оказалась та же строка, буквы которой записаны в обратном порядке?

9.3. Каждое натуральное число, большее 1000, окрасили либо в красный, либо в синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух различных красных чисел — синее. Может ли случиться, что никакие два синих числа не отличаются на 1?

9.4. Точка X лежит строго внутри описанной около треугольника ABC окружности. Обозначим через I_B и I_C центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $XI_B \cdot XI_C > XB \cdot XC$.

9 класс

Первый день

9.1. Даны два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$; известно, что трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ имеют по два корня. Оказалось, что разность корней трёхчлена $f(x)$ равна разности корней трёхчлена $g(x)$. Докажите, что разность корней трёхчлена $f(x)+g(x)$ не больше этих разностей. (В каждой разности из большего корня вычитается меньший.)

9.2. Изначально в строку выписывают 250 букв — 125 букв А и 125 букв Б в некотором порядке. Затем за одну операцию можно взять любой кусок из нескольких подряд стоящих букв, среди которых поровну букв А и Б, и переставить буквы в этом куске в обратном порядке, поменяв в этом куске все буквы А на буквы Б и буквы Б на буквы А. (Например, из строки А$\underbrace{\text{БАББАА}}$Б можно одной операцией получить строку А$\underbrace{\text{ББААБА}}$Б.) Можно ли выписать исходную строку и совершить несколько операций так, чтобы в результате на доске оказалась та же строка, буквы которой записаны в обратном порядке?

9.3. Каждое натуральное число, большее 1000, окрасили либо в красный, либо в синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух различных красных чисел — синее. Может ли случиться, что никакие два синих числа не отличаются на 1?

9.4. Точка X лежит строго внутри описанной около треугольника ABC окружности. Обозначим через I_B и I_C центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $XI_B \cdot XI_C > XB \cdot XC$.

10 класс

Первый день

10.1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T.

10.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.

10.3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geqslant 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

10.4. С одной стороны теннисного стола выстроилась очередь из n девочек, а с другой — из n мальчиков. И девочки, и мальчики пронумерованы числами от 1 до n в том порядке, как они стоят. Первую партию играют девочка и мальчик с номерами 1, а далее после каждой партии проигравший встаёт в конец своей очереди, а победивший играет со следующим. Через некоторое время оказалось, что каждая девочка сыграла ровно одну партию с каждым мальчиком. Докажите, что если n нечётно, то в последней партии играли девочка и мальчик с нечётными номерами.

10 класс

Первый день

10.1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T.

10.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.

10.3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geqslant 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

10.4. С одной стороны теннисного стола выстроилась очередь из n девочек, а с другой — из n мальчиков. И девочки, и мальчики пронумерованы числами от 1 до n в том порядке, как они стоят. Первую партию играют девочка и мальчик с номерами 1, а далее после каждой партии проигравший встаёт в конец своей очереди, а победивший играет со следующим. Через некоторое время оказалось, что каждая девочка сыграла ровно одну партию с каждым мальчиком. Докажите, что если n нечётно, то в последней партии играли девочка и мальчик с нечётными номерами.

11 класс

Первый день

11.1. Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ — рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

11.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.

11.3. В каждой строке таблицы $100 \times n$ в некотором порядке стоят числа от 1 до 100, числа в строке не повторяются (в таблице n строк и 100 столбцов). Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?

11.4. Окружность ω описана около треугольника ABC, в котором $AB < AC$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Из середины M стороны BC на прямую AI опущен перпендикуляр MH. Прямые MH, BI и AB ограничивают треугольник T_b, а прямые MH, CI и AC ограничивают треугольник T_c. Описанные окружности треугольников T_b и T_c повторно пересекают окружность ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка H лежит на прямой $B'C'$.

11 класс

Первый день

11.1. Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ — рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

11.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.

11.3. В каждой строке таблицы $100 \times n$ в некотором порядке стоят числа от 1 до 100, числа в строке не повторяются (в таблице n строк и 100 столбцов). Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?

11.4. Окружность ω описана около треугольника ABC, в котором $AB < AC$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Из середины M стороны BC на прямую AI опущен перпендикуляр MH. Прямые MH, BI и AB ограничивают треугольник T_b, а прямые MH, CI и AC ограничивают треугольник T_c. Описанные окружности треугольников T_b и T_c повторно пересекают окружность ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка H лежит на прямой $B'C'$.