

9 класс

Первый день

- 9.1. На прямоугольном листе бумаги провели несколько отрезков, параллельных его сторонам. Эти отрезки разбили лист на несколько прямоугольников, внутри которых нет проведённых линий. Петя хочет провести в каждом из прямоугольников разбиения одну диагональ, разбив его на два треугольника, и окрасить каждый треугольник либо в чёрный, либо в белый цвет. Верно ли, что он обязательно сможет это сделать так, чтобы никакие два одноцветных треугольника не имели общего отрезка границы?
- 9.2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Точки касания описанных окружностей треугольников ABE и CDE с их общими внешними касательными лежат на окружности ω . Точки касания описанных окружностей треугольников ADE и BCE с их общими внешними касательными лежат на окружности γ . Докажите, что центры окружностей ω и γ совпадают.
- 9.3. Найдите все натуральные n , для которых существует такое чётное натуральное a , что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом.
- 9.4. Шахматного короля поставили на клетку доски 8×8 и сделали им 64 хода так, что он побывал на всех клетках и вернулся в исходную клетку. В каждый момент времени вычислялось расстояние от центра клетки, в которой находился король, до центра всей доски. Назовём сделанный ход *приятным*, если в результате хода это расстояние стало меньше, чем было до хода. Найдите наибольшее возможное количество приятных ходов. (Шахматный король за один ход передвигается на клетку, соседнюю по стороне или по углу.)

9 класс

Первый день

- 9.1. На прямоугольном листе бумаги провели несколько отрезков, параллельных его сторонам. Эти отрезки разбили лист на несколько прямоугольников, внутри которых нет проведённых линий. Петя хочет провести в каждом из прямоугольников разбиения одну диагональ, разбив его на два треугольника, и окрасить каждый треугольник либо в чёрный, либо в белый цвет. Верно ли, что он обязательно сможет это сделать так, чтобы никакие два одноцветных треугольника не имели общего отрезка границы?
- 9.2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Точки касания описанных окружностей треугольников ABE и CDE с их общими внешними касательными лежат на окружности ω . Точки касания описанных окружностей треугольников ADE и BCE с их общими внешними касательными лежат на окружности γ . Докажите, что центры окружностей ω и γ совпадают.
- 9.3. Найдите все натуральные n , для которых существует такое чётное натуральное a , что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом.
- 9.4. Шахматного короля поставили на клетку доски 8×8 и сделали им 64 хода так, что он побывал на всех клетках и вернулся в исходную клетку. В каждый момент времени вычислялось расстояние от центра клетки, в которой находился король, до центра всей доски. Назовём сделанный ход *приятным*, если в результате хода это расстояние стало меньше, чем было до хода. Найдите наибольшее возможное количество приятных ходов. (Шахматный король за один ход передвигается на клетку, соседнюю по стороне или по углу.)

10 класс

Первый день

- 10.1. Петя и Вася играют в игру на изначально пустой клетчатой таблице 100×100 , делая ходы по очереди. Начинает Петя. За свой ход игрок вписывает в некоторую пустую клетку любую заглавную букву русского алфавита (в каждую клетку можно вписать ровно одну букву). Когда все клетки будут заполнены, Петя объявляется победителем, если найдутся четыре подряд идущие клетки по горизонтали, в которых слева направо написано слово «ПЕТЯ», или найдутся четыре подряд идущие клетки по вертикали, в которых сверху вниз написано слово «ПЕТЯ». Сможет ли Петя выиграть независимо от действий Васи?
- 10.2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . На отрезке AB отмечена точка Q , а на отрезке AC — точка R так, что описанные окружности треугольников BPQ и CPR касаются прямой AP . Через точки B и C провели прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника BPC , а через точки Q и R — прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника PQR . Докажите, что существует окружность, которая касается четырёх проведённых прямых.
- 10.3. Найдите все натуральные n , для которых существует такое чётное натуральное a , что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом.
- 10.4. На плоскости отмечены 10^6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведены все отрезки между ними. Гриша поставил на каждом проведённом отрезке вещественное число, по модулю не превосходящее 1, и для каждой шестёрки отмеченных точек посчитал сумму чисел на всех 15 отрезках, соединяющих их. Оказалось, что каждая такая сумма по модулю не меньше числа C , при этом среди таких сумм есть как положительная, так и отрицательная. При каком наибольшем C это возможно?

10 класс

Первый день

- 10.1. Петя и Вася играют в игру на изначально пустой клетчатой таблице 100×100 , делая ходы по очереди. Начинает Петя. За свой ход игрок вписывает в некоторую пустую клетку любую заглавную букву русского алфавита (в каждую клетку можно вписать ровно одну букву). Когда все клетки будут заполнены, Петя объявляется победителем, если найдутся четыре подряд идущие клетки по горизонтали, в которых слева направо написано слово «ПЕТЯ», или найдутся четыре подряд идущие клетки по вертикали, в которых сверху вниз написано слово «ПЕТЯ». Сможет ли Петя выиграть независимо от действий Васи?
- 10.2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . На отрезке AB отмечена точка Q , а на отрезке AC — точка R так, что описанные окружности треугольников BPQ и CPR касаются прямой AP . Через точки B и C провели прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника BPC , а через точки Q и R — прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника PQR . Докажите, что существует окружность, которая касается четырёх проведённых прямых.
- 10.3. Найдите все натуральные n , для которых существует такое чётное натуральное a , что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом.
- 10.4. На плоскости отмечены 10^6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведены все отрезки между ними. Гриша поставил на каждом проведённом отрезке вещественное число, по модулю не превосходящее 1, и для каждой шестёрки отмеченных точек посчитал сумму чисел на всех 15 отрезках, соединяющих их. Оказалось, что каждая такая сумма по модулю не меньше числа C , при этом среди таких сумм есть как положительная, так и отрицательная. При каком наибольшем C это возможно?

11 класс

Первый день

- 11.1. На доску выписали 777 попарно различных *комплексных* чисел. Оказалось, что можно ровно 760 способами выбрать два числа a и b , записанных на доске, так, чтобы выполнялось равенство

$$a^2 + b^2 + 1 = 2ab.$$

Способы, которые отличаются перестановкой чисел, считаются одинаковыми. Докажите, что можно выбрать такие два числа c и d , записанных на доске, что

$$c^2 + d^2 + 2025 = 2cd.$$

- 11.2. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что треугольники A_1BC , AB_1C , ABC_1 и ABC — остроугольные. Докажите, что точки пересечения высот этих треугольников вместе с точкой пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной сфере.
- 11.3. Пару многочленов $F(x, y)$ и $G(x, y)$ с целыми коэффициентами назовём *важной*, если из делимости на 100 обеих разностей $F(a, b) - F(c, d)$ и $G(a, b) - G(c, d)$, где a, b, c, d — целые, следует, что числа $a - c$ и $b - d$ делятся на 100. Существует ли такая важная пара многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$, что пара многочленов $P(x, y) - xy$ и $Q(x, y) + xy$ также является важной?
- 11.4. Дано натуральное число N . Куб со стороной $2N + 1$ сложен из $(2N + 1)^3$ единичных кубиков, каждый из которых — либо чёрный, либо белый. Оказалось, что среди любых 8 кубиков, имеющих общую вершину и образующих куб $2 \times 2 \times 2$, не более 4 чёрных кубиков. Какое наибольшее количество чёрных кубиков могло быть использовано?

11 класс

Первый день

- 11.1. На доску выписали 777 попарно различных *комплексных* чисел. Оказалось, что можно ровно 760 способами выбрать два числа a и b , записанных на доске, так, чтобы выполнялось равенство

$$a^2 + b^2 + 1 = 2ab.$$

Способы, которые отличаются перестановкой чисел, считаются одинаковыми. Докажите, что можно выбрать такие два числа c и d , записанных на доске, что

$$c^2 + d^2 + 2025 = 2cd.$$

- 11.2. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что треугольники A_1BC , AB_1C , ABC_1 и ABC — остроугольные. Докажите, что точки пересечения высот этих треугольников вместе с точкой пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной сфере.
- 11.3. Пару многочленов $F(x, y)$ и $G(x, y)$ с целыми коэффициентами назовём *важной*, если из делимости на 100 обеих разностей $F(a, b) - F(c, d)$ и $G(a, b) - G(c, d)$, где a, b, c, d — целые, следует, что числа $a - c$ и $b - d$ делятся на 100. Существует ли такая важная пара многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$, что пара многочленов $P(x, y) - xy$ и $Q(x, y) + xy$ также является важной?
- 11.4. Дано натуральное число N . Куб со стороной $2N + 1$ сложен из $(2N + 1)^3$ единичных кубиков, каждый из которых — либо чёрный, либо белый. Оказалось, что среди любых 8 кубиков, имеющих общую вершину и образующих куб $2 \times 2 \times 2$, не более 4 чёрных кубиков. Какое наибольшее количество чёрных кубиков могло быть использовано?