

Материалы для проведения
заключительного этапа
LI ВСЕРОССИЙСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2024–2025 учебный год

Первый день

Сириус,
16–22 апреля 2025 г.

Москва, 2025

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа LI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, Н. Ю. Власова П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. Г. Храмцов, Г. М. Шарифетдинова, Г. Р. Челноков.

А также А. В. Антропов, И. А. Ефремов, П. Ю. Козлов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, А. И. Храбров, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов



УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс

- 9.1. На прямоугольном листе бумаги провели несколько отрезков, параллельных его сторонам. Эти отрезки разбили лист на несколько прямоугольников, внутри которых нет проведённых линий. Петя хочет провести в каждом из прямоугольников разбиения одну диагональ, разбив его на два треугольника, и окрасить каждый треугольник либо в чёрный, либо в белый цвет. Верно ли, что он обязательно сможет это сделать так, чтобы никакие два одноцветных треугольника не имели общего отрезка границы? (С. Л. Берлов)

Ответ. Да, верно.

Решение. Пусть Петя проведёт в каждом из прямоугольников диагональ из левого нижнего угла в правый верхний. После этого все треугольники, примыкающие к левым верхним углам прямоугольников, он покрасит в чёрный цвет, а остальные — в белый.

Докажем, что такая раскраска подойдёт. Рассмотрим общий отрезок границы двух треугольников. Если этот отрезок диагональный, то сверху к нему примыкает чёрный треугольник, а снизу белый. Если отрезок горизонтальный, то к нему сверху примыкает белый треугольник, а снизу — чёрный; случай вертикального отрезка аналогичен. Поэтому такая раскраска подходит.

- 9.2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Точки касания описанных окружностей треугольников ABE и CDE с их общими внешними касательными лежат на окружности ω . Точки касания описанных окружностей треугольников ADE и BCE с их общими внешними касательными лежат на окружности γ . Докажите, что центры окружностей ω и γ совпадают. (А. Д. Терёшин)

Решение. Обозначим центры описанных окружностей треугольников ABE , BCE , CDE , ADE через O_{AB} , O_{BC} , O_{CD} , O_{AD} соответственно. Пусть T_1 , T_2 — точки касания одной из

общих касательных с описанными окружностями треугольников ABE и CDE соответственно; обозначим через O и T середины отрезков $O_{AB}O_{CD}$ и T_1T_2 соответственно (см. рис. 1). Тогда в прямоугольной трапеции $O_{AB}T_1T_2O_{CD}$ прямая OT — средняя линия, поэтому она является серединным перпендикуляром к отрезку T_1T_2 . Заметим, что окружность ω симметрична относительно прямой $O_{AB}O_{CD}$, на которой также лежит точка O , значит, O — центр ω .

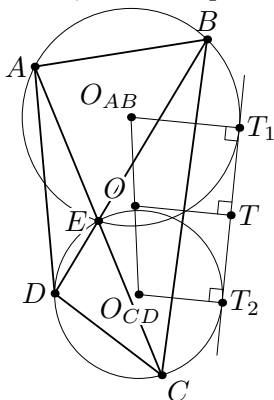


Рис. 1

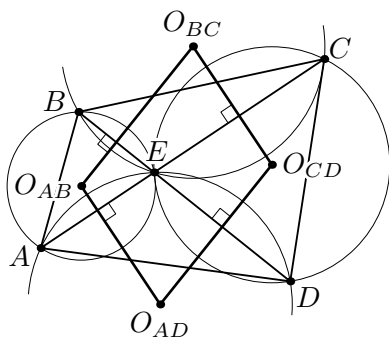


Рис. 2

Аналогично получаем, что середина отрезка $O_{AD}O_{BC}$ является центром γ . Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что $O_{AB}O_{BC}O_{CD}O_{AD}$ — параллелограмм. Для доказательства этого достаточно заметить, что $O_{AB}O_{BC}$ и $O_{CD}O_{AD}$ — серединные перпендикуляры к отрезкам EB и ED , поэтому $O_{AB}O_{BC} \parallel O_{CD}O_{AD}$; аналогично, $O_{AB}O_{AD} \parallel O_{BC}O_{CD}$, откуда и следует требуемое.

- 9.3. Найдите все натуральные n , для которых существует такое чётное натуральное a , что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом.
(Т. С. Коротченко)

Ответ. $n = 1$ и $n = 2$.

Решение. Для $n = 1$ подойдёт любое чётное a вида $m^2 + 1$, например, $a = 2$. Для $n = 2$ подойдёт любое чётное a вида $m^2 - 1$, например, $a = 8$.

Предположим, что для $n = 3$ нашлось требуемое число a . Тогда число $(a-1)(a^2-1)(a^3-1) = (a-1)^3(a+1)(a^2+a+1)$

является точным квадратом. Поскольку $a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1$, числа $a + 1$ и $a^2 + a + 1$ взаимно просты. Раз число $a + 1$ нечётно, числа $a + 1$ и $a - 1$ также взаимно просты. Следовательно, числа $a + 1$ и $(a - 1)(a^2 + a + 1)$ — точные квадраты. В частности, число $a + 1$ при делении на 3 может давать лишь остаток 0 или 1, а тогда число $a - 1$ не делится на 3. Отсюда

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a - 1, a^2 + a + 1) &= \text{НОД}(a - 1, (a + 2)(a - 1) + 3) = \\ &= \text{НОД}(a - 1, 3) = 1,\end{aligned}$$

значит, числа $a - 1$ и $a^2 + a + 1$ также являются точными квадратами. Но второе являться квадратом не может, поскольку $a^2 < a^2 + a + 1 < (a + 1)^2$. Противоречие.

Осталось доказать, что требуемого a не существует при $n \geq 4$. Предположим, что такое a нашлось. Возьмём такое натуральное $k \geq 2$, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Поскольку $a^{2^k} - 1 = (a^{2^{k-1}} - 1)(a^{2^{k-1}} + 1)$, число $(a - 1)(a^2 - 1) \dots (a^n - 1)$ представляется в виде произведения $a^{2^{k-1}} + 1$ и нескольких множителей вида $a^m - 1$, где $1 \leq m \leq n$ и $m \neq 2^k$.

Докажем, что множитель $a^{2^{k-1}} + 1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в этом разложении. Пусть $a^{2^{k-1}} + 1$ и $a^m - 1$ имеют некоторый общий делитель d . Тогда и $\text{НОД}(a^{2^k} - 1, a^m - 1)$ кратен d . Но $\text{НОД}(a^{2^k} - 1, a^m - 1) = a^{\text{НОД}(2^k, m)} - 1$. Поскольку $m \neq 2^k$ и $m \leq n < 2^{k+1}$, число m не может делиться на 2^k . Таким образом, $\text{НОД}(2^k, m)$ — степень двойки, не превосходящая 2^{k-1} . Следовательно, $a^{2^{k-1}} - 1$ делится на $\text{НОД}(a^{2^k} - 1, a^m - 1)$, а значит, делится и на d . Поскольку a чётно, числа $a^{2^{k-1}} - 1$ и $a^{2^{k-1}} + 1$ не имеют общих делителей, отличных от 1, значит, $d = 1$, что и требовалось.

Множитель $a^{2^{k-1}} + 1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в произведении, являющемся точным квадратом, поэтому он сам является точным квадратом. Тогда $a^{2^{k-1}} + 1$ и $a^{2^{k-1}} - 1$ — отличающиеся на 1 квадраты натуральных чисел, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и для $n \geq 4$ требуемых чисел a не найдётся.

9.4. Шахматного короля поставили на клетку доски 8×8 и сделали

им 64 хода так, что он побывал на всех клетках и вернулся в исходную клетку. В каждый момент времени вычислялось расстояние от центра клетки, в которой находился король, до центра всей доски. Назовём сделанный ход *приятным*, если в результате хода это расстояние стало меньше, чем было до хода. Найдите наибольшее возможное количество приятных ходов. (Шахматный король за один ход передвигается на клетку, соседнюю по стороне или по углу.) (С. И. Токарев)

Ответ. 44 хода.

Решение. Докажем, что среди ходов должно было быть хотя бы 20 неприятных (а значит, количество приятных ходов не больше 44). Расставим в клетках числа, как показано на рис. 3; клетки с одинаковыми числами удалены на одно и то же расстояние от центра, а клетки с меньшими номерами ближе к центру, чем клетки с большими.

9	8	7	6	6	7	8	9
8	6	5	4	4	5	6	8
7	5	3	2	2	3	5	7
6	4	2	1	1	2	4	6
6	4	2	1	1	2	4	6
7	5	3	2	2	3	5	7
8	6	5	4	4	5	6	8
9	8	7	6	6	7	8	9

Рис. 3

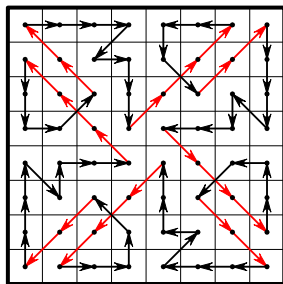


Рис. 4

Каждый ход из клетки с числом 1 не уменьшает расстояния до центра и потому неприятен — таких ходов 4. Ход из клетки с числом 2 может быть приятным, только когда он идёт в клетку с числом 1. Но на доске восемь чисел 2 и только четыре числа 1, поэтому хотя бы четыре хода из клеток с числом 2 будут неприятными.

Рассмотрим теперь ходы, ведущие в 32 клетки с числами, не меньшими 6. Заметим, что эти ходы не могут идти из клеток с числами 1 и 2, то есть в рассуждении выше они не учтены. Такой ход может быть приятным, только если он идёт из клетки с номером, не меньшим 7; однако таких клеток всего 20. Значит, среди рассмотренных ходов ещё $32 - 20 = 12$ неприятных, и

общее количество неприятных ходов не меньше, чем $4 + 4 + 12 = 20$.

Пример обхода, в котором 44 приятных хода, приведён на рис. 4.

Замечание. По сути, в последней части доказательства оценки показано, что среди ходов, ведущих в клетки, отмеченные зелёным на рис. 3, есть не менее трёх неприятных. Это можно доказать разными способами, например, проведя небольшой перебор.

10 класс

- 10.1. Петя и Вася играют в игру на изначально пустой клетчатой таблице 100×100 , делая ходы по очереди. Начинает Петя. За свой ход игрок вписывает в некоторую пустую клетку любую заглавную букву русского алфавита (в каждую клетку можно вписать ровно одну букву). Когда все клетки будут заполнены, Петя объявляется победителем, если найдутся четыре подряд идущие клетки по горизонтали, в которых слева направо написано слово «ПЕТЯ», или найдутся четыре подряд идущие клетки по вертикали, в которых сверху вниз написано слово «ПЕТЯ». Сможет ли Петя выиграть независимо от действий Васи?

(А. А. Солыгин)

Ответ. Не сможет.

Решение. Опишем выигрышную стратегию Васи. Пусть Вася все время пишет букву «Ю» в клетку согласно следующим ниже условиям; а если указанная клетка не существует или уже занята, а также если Петя ставит любую букву отличную от «П», «Е», «Т», «Я», то пусть Вася ставит «Ю» в любую свободную клетку.

Если Петя в некоторой клетке пишет букву «П», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней справа; если Петя пишет букву «Е», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней слева; если Петя пишет букву «Т», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней снизу; если Петя пишет букву «Я», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней сверху.

Из первых двух условий следует, что в двух соседних по горизонтали клетках не могло появиться «ПЕ», читаемое слева направо. В самом деле, предположим, что горизонтальное «ПЕ» появилось; тогда после появления первой из этих двух букв Вася, согласно описанной стратегии, сразу займёт место второй из этих букв — противоречие. Аналогично, в двух соседних по вертикали клетках не могло появиться «ТЯ», читаемое сверху вниз.

- 10.2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . На отрезке AB отмечена точка Q , а на отрезке AC — точка R так, что описанные окружности треугольников BPQ и CPR касаются прямой AP . Через точки B и C провели прямые, проходящие через

центр описанной окружности треугольника BPC , а через точки Q и R — прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника PQR . Докажите, что существует окружность, которая касается четырёх проведённых прямых.

(А. Д. Терёшин, А. С. Кузнецов)

Решение. Поскольку $AB \cdot AQ = AP^2 = AC \cdot AR$, четырёхугольник $BCRQ$ — вписанный. Пусть O — центр окружности $(BCRQ)$. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей (BPC) и (QPR) . Покажем, что прямые BO_1 , CO_1 , QO_2 , RO_2 равноудалены от O . Так как $OB = OC = OQ = OR$, для этого достаточно установить равенство (направленных) углов $\angle OCO_1 = \angle O_1BO = \angle OQO_2 = \angle O_2RO$. Здесь первое и последнее равенства очевидны из симметрии относительно серединных перпендикуляров к BC и QR .

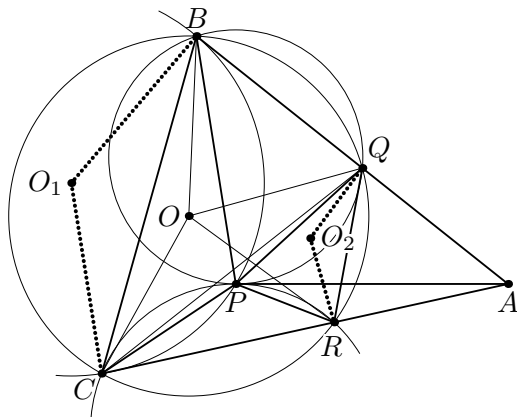


Рис. 5

Остаётся доказать равенство $\angle O_1BO = \angle OQO_2$ (*). Из счёта углов получаем $\angle OQO_2 = \angle OQR - \angle O_2QR = (90^\circ - \angle RCQ) - (90^\circ - \angle RPQ) = \angle RPQ - \angle RCQ$. Аналогично $\angle O_1BO = \angle BPC - \angle BQC$. Значит, (*) эквивалентно равенству $\angle RPQ - \angle RCQ = \angle BPC - \angle BQC$ или $\angle BQC - \angle RCQ = \angle BPC - \angle RPQ$ (**). Из касания окружностей (BPQ) и (CPR) следует $\angle RPQ = \angle RCP + \angle PBQ$, что равно (из суммы углов четырёхугольника $BPCA$) $\angle BPC - \angle BAC$. Тем самым, (**) преобразуется к виду $\angle BQC - \angle RCQ = \angle BAC$, что верно. Задача решена.

- 10.3. Найдите все натуральные n , для которых существует такое чётное натуральное a , что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом. (Т. С. Коротченко)

Ответ. $n = 1$ и $n = 2$.

Решение. Для $n = 1$ подойдёт любое чётное a вида $m^2 + 1$, например, $a = 2$. Для $n = 2$ подойдёт любое чётное a вида $m^2 - 1$, например, $a = 8$.

Предположим, что для $n = 3$ нашлось требуемое число a . Тогда число $(a-1)(a^2-1)(a^3-1) = (a-1)^3(a+1)(a^2+a+1)$ является точным квадратом. Поскольку $a^2+a+1 = a(a+1)+1$, числа $a+1$ и a^2+a+1 взаимно просты. Раз число $a+1$ нечётно, числа $a+1$ и $a-1$ также взаимно просты. Следовательно, числа $a+1$ и $(a-1)(a^2+a+1)$ — точные квадраты. В частности, число $a+1$ при делении на 3 может давать лишь остаток 0 или 1, а тогда число $a-1$ не делится на 3. Отсюда

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a-1, a^2+a+1) &= \text{НОД}(a-1, (a+2)(a-1)+3) = \\ &= \text{НОД}(a-1, 3) = 1,\end{aligned}$$

значит, числа $a-1$ и a^2+a+1 также являются точными квадратами. Но второе являться квадратом не может, поскольку $a^2 < a^2+a+1 < (a+1)^2$. Противоречие.

Осталось доказать, что требуемого a не существует при $n \geq 4$. Предположим, что такое a нашлось. Возьмём такое натуральное $k \geq 2$, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Поскольку $a^{2^k} - 1 = (a^{2^{k-1}} - 1)(a^{2^{k-1}} + 1)$, число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ представляется в виде произведения $a^{2^{k-1}} + 1$ и нескольких множителей вида $a^m - 1$, где $1 \leq m \leq n$ и $m \neq 2^k$.

Докажем, что множитель $a^{2^{k-1}} + 1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в этом разложении. Пусть $a^{2^{k-1}} + 1$ и $a^m - 1$ имеют некоторый общий делитель d . Тогда и $\text{НОД}(a^{2^k} - 1, a^m - 1)$ кратен d . Но $\text{НОД}(a^{2^k} - 1, a^m - 1) = a^{\text{НОД}(2^k, m)} - 1$. Поскольку $m \neq 2^k$ и $m \leq n < 2^{k+1}$, число m не может делиться на 2^k . Таким образом, $\text{НОД}(2^k, m)$ — степень двойки, не превосходящая 2^{k-1} . Следовательно, $a^{2^{k-1}} - 1$ делится на $\text{НОД}(a^{2^k} - 1, a^m - 1)$, а значит, делится и на d . Поскольку a

чётно, числа $a^{2^{k-1}} - 1$ и $a^{2^{k-1}} + 1$ не имеют общих делителей, отличных от 1, значит, $d = 1$, что и требовалось.

Множитель $a^{2^{k-1}} + 1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в произведении, являющемся точным квадратом, поэтому он сам является точным квадратом. Тогда $a^{2^{k-1}} + 1$ и $a^{2^{k-1}} - 1$ — отличающиеся на 1 квадраты натуральных чисел, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и для $n \geq 4$ требуемых чисел a не найдётся.

- 10.4. На плоскости отмечены 10^6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведены все отрезки между ними. Гриша поставил на каждом проведённом отрезке вещественное число, по модулю не превосходящее 1, и для каждой шестёрки отмеченных точек посчитал сумму чисел на всех 15 отрезках, соединяющих их. Оказалось, что каждая такая сумма по модулю не меньше числа C , при этом среди таких сумм есть как положительная, так и отрицательная. При каком наибольшем C это возможно?

(Г. Р. Челноков)

Ответ. $\frac{15}{4}$.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются отмеченные точки, а рёбрами — проведённые отрезки.

Оценка. Докажем оценку $C \leq \frac{15}{4}$. Условие гласит, что в нашем полном графе есть как шестёрки вершин, сумма на рёбрах между которыми положительна, так и шестёрки, сумма на рёбрах между которыми отрицательна. Тогда найдутся две шестёрки, отличающиеся заменой только одной вершины, такие, что у одной из них сумма положительна, у другой отрицательна. В самом деле, возьмём шестёрку с положительной суммой, и будем превращать её в шестёрку с отрицательной, меняя вершины по одной — на каком то шаге произошло изменение знака, шестёрки, которые были до и после этого шага — искомая пара.

Далее работаем с полным подграфом на множестве S из семи вершин — объединении вышеописанной пары шестёрок. Рассмотрим все семь шестёрок, которые можно получить выбрасыванием одной вершины из S . Пусть среди них k с отрицательными суммами — получающиеся выбрасыванием вер-

шин $A_1, \dots, A_k$ (будем называть эти вершины *А-вершинами*, а соответствующие шестёрки — *А-шестёрками*), и $7 - k$ с положительными суммами — получающиеся выбрасыванием вершин $B_1, \dots, B_{7-k}$ (будем называть эти вершины *В-вершинами*, а соответствующие шестёрки — *В-шестёрками*). Рёбра между двумя *А-вершинами* будем называть *АА-рёбрами*, между двумя *В-вершинами* — *ВВ-рёбрами*, а рёбра, соединяющие *А-вершину* с *В-вершиной* — *АВ-рёбрами*.

Из *старой* расстановки чисел на рёбрах, соединяющих вершины множества S , получим *новую* расстановку, заменив все числа на *АА-рёбрах* на число x , равное их среднему арифметическому, и аналогично заменив все числа на *АВ-рёбрах* на их среднее арифметическое y , а все числа на *ВВ-рёбрах* на их среднее арифметическое z . Очевидно, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$, так как все старые числа по модулю не превосходят 1.

Лемма. Подграф S с новыми числами на рёбрах удовлетворяет условию с той же константой C .

Доказательство леммы. Заметим, что для каждого *АА-ребра* есть одно и то же количество *А-шестёрок*, в которые входят оба его конца. И наоборот, для любой *А-шестёрки* среди 15 рёбер между её вершинами есть одно и то же количество *АА-рёбер*. То же верно для *АВ-рёбер* и для *ВВ-рёбер*. Значит, сумма Σ_A чисел на рёбрах в *А-шестёрке* в новой расстановке есть среднее сумм по всем *А-шестёркам* в старой расстановке, то есть среднее нескольких чисел, не больших $-C$; значит, $\Sigma_A \leq -C$. Аналогичное утверждение верно для сумм в *В-шестёрках*. Лемма доказана. $\square$

Далее изучаем новую расстановку. Рассмотрим случаи.

Случай $k = 1$. Иными словами, есть ровно одна *А-шестёрка*, на которой пятнадцать *ВВ-рёбер*, и шесть *В-шестёрок*, на каждой из которых десять *ВВ-рёбер* и пять *АВ-рёбер*. Имеем систему неравенств: $15z \leq -C$, $5y + 10z \geq C$. Умножим первое на -2 , сложим со вторым, умноженным на 3, получим $15y \geq 5C$, откуда $C \leq 3$.

Случай $k = 2$. Теперь у нас две *А-вершины* и пять *В-вершин*, то есть на *А-шестёрке* есть десять *ВВ-рёбер* и пять *АВ-рёбер*, а на *В-шестёрке* — шесть *ВВ-рёбер*, восемь *АВ-рёбер*

и одно AA -ребро. Имеем $5y + 10z \leq -C$, $x + 8y + 6z \geq C$. Исключая z , получаем $8C \leq 5x + 25y \leq 30$, значит, $C \leq \frac{15}{4}$.

Случай $k = 3$. Аналогично предыдущему, имеем $x + 8y + 6z \leq -C$, $3x + 9y + 3z \geq C$. Избавляясь на этот раз от y , получаем $17C \leq 15x - 30z \leq 45$, откуда $C \leq \frac{45}{17} < \frac{15}{4}$.

Случай $k \geq 4$ сводятся к рассмотренным умножением всех чисел на -1 , что ведёт к замене $k \mapsto 7 - k$. Итак, оценка $C \leq \frac{15}{4}$ доказана.

Пример. Любое число вершин от двух до 999995 объявим вершинами типа A , остальные — вершинами типа B . На всех рёбрах между двумя вершинами типа B напишем число $-\frac{7}{8}$, на всех остальных — число 1. Тогда, если в шестёрке вершин хотя бы пять B -вершин, то сумма в ней не больше $-\frac{15}{4}$, а иначе — не меньше $\frac{15}{4}$.

11 класс

- 11.1. На доску выписали 777 попарно различных *комплексных* чисел. Оказалось, что можно ровно 760 способами выбрать два числа a и b , записанных на доске, так, чтобы выполнялось равенство

$$a^2 + b^2 + 1 = 2ab.$$

Способы, которые отличаются перестановкой чисел, считаются одинаковыми. Докажите, что можно выбрать такие два числа c и d , записанных на доске, что

$$c^2 + d^2 + 2025 = 2cd.$$

(А. С. Кузнецов)

Решение. Заметим, что условие $a^2 + b^2 + 1 = 2ab$ равносильно тому, что $(a - b)^2 = -1$ или же $a - b = \pm i$. Рассмотрим граф, вершины которого — записанные на доску числа, а ребро проводится между двумя числами, которые отличаются на i . Согласно условию задачи, в таком графе ровно 760 рёбер. Каждая компонента связности этого графа представляет собой путь и состоит из вершин-чисел вида $z, z + i, z + 2i, \dots, z + (n - 1)i$. Предположим, что в этом графе k компонент связности. Тогда в нём $777 - k$ рёбер, поэтому $k = 17$. Поскольку $17 \cdot 45 = 765 < 777$, то в какой-то компоненте связности хотя бы 46 вершин, поэтому какие-то две из этих вершин — это числа c и $d = c + 45i$. Тогда $(c - d)^2 = 45^2 \cdot i^2 = -2025$, следовательно, $c^2 + d^2 + 2025 = 2cd$, что и требовалось.

- 11.2. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что треугольники A_1BC , AB_1C , ABC_1 и ABC — остроугольные. Докажите, что точки пересечения высот этих треугольников вместе с точкой пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной сфере.

(А. Д. Терёшин)

Решение. Обозначим через M и H точки пересечения медиан и высот треугольника ABC , а также отметим точку T так, что $\overrightarrow{3MT} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Пусть сфера ω построена на отрезке HT как на диаметре. Поскольку прямая MT перпендикулярна плоскости ABC , то точка M лежит на ω . Покажем, что на сфере ω лежит точка пересечения высот H_1 треугольни-

ка A_1BC , рассуждение для двух других треугольников аналогично.

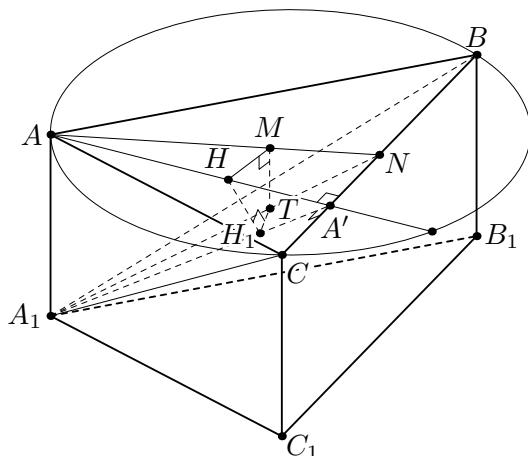


Рис. 6

Обозначим через N середину отрезка BC . Поскольку $NA = 3NM$, точка T лежит на отрезке A_1N , в частности, она лежит в плоскости A_1BC . Пусть AA' — высота треугольника ABC . Поскольку прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC , то $\angle A_1AA' = 90^\circ$, а также $A'A_1 \perp BC$ по теореме о трёх перпендикулярах, то есть точка H_1 лежит на отрезке A_1A' . Поскольку точка, симметричная точке пересечения высот H треугольника ABC относительно прямой BC , лежит на его описанной окружности, то $A'H \cdot A'A = A'B \cdot A'C$. Применяя то же рассуждение для треугольника A_1BC , мы получаем, что $A'H_1 \cdot A'A_1 = A'B \cdot A'C = A'H \cdot A'A$. Следовательно, четырёхугольник AHH_1A_1 вписанный, поэтому $\angle HH_1A_1 = 180^\circ - \angle A_1AH = 90^\circ$. Поскольку ещё $HA' \perp BC$ и $H_1A' \perp BC$, вновь применяя теорему о трёх перпендикулярах, мы получаем, что прямая HH_1 перпендикулярна плоскости A_1BC . Значит, $\angle HH_1T = 90^\circ$, то есть точка H_1 лежит на сфере ω , что и требовалось.

Замечание. Точка T — общая точка пересечения медиан треугольников A_1BC, AB_1C, ABC_1 .

- 11.3. Пару многочленов $F(x, y)$ и $G(x, y)$ с целыми коэффициентами назовём *важной*, если из делимости на 100 обеих разностей $F(a, b) - F(c, d)$ и $G(a, b) - G(c, d)$, где a, b, c, d — целые, следует,

что числа $a - c$ и $b - d$ делятся на 100. Существует ли такая важная пара многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$, что пара многочленов $P(x, y) - xy$ и $Q(x, y) + xy$ также является важной?

(А. С. Голованов)

Ответ. Не существует.

Решение. Пусть пара многочленов F и G — важная. Рассмотрим пары остатков от деления на 100 чисел $F(a, b)$ и $G(a, b)$, где a, b — всевозможные пары целых чисел от 0 до 99. Согласно условию задачи, все такие пары остатков разные. Поскольку всего пар чисел 100^2 , то каждая пара остатков от деления на 100 достигается ровно один раз. Значит, достигаются все 4 возможные пары чётностей чисел $F(a, b)$, $G(a, b)$. Поскольку чётность значения многочлена с целыми коэффициентами в точке (a, b) зависит только от чётности чисел a и b , мы получаем, что пары значений $(F(0, 0); G(0, 0))$, $(F(1, 0); G(1, 0))$, $(F(0, 1); G(0, 1))$, $(F(1, 1); G(1, 1))$ дают все четыре возможные пары чётностей. Однако заметим, что для пар многочленов $F = P$, $G = Q$ и $F(x, y) = P(x, y) - xy$, $G(x, y) = Q(x, y) + xy$ первые три пары чётностей одинаковые, а последняя пара — разная. Следовательно, обе такие пары многочленов важными быть не могут.

- 11.4. Дано натуральное число N . Куб со стороной $2N + 1$ сложен из $(2N + 1)^3$ единичных кубиков, каждый из которых — либо чёрный, либо белый. Оказалось, что среди любых 8 кубиков, имеющих общую вершину и образующих куб $2 \times 2 \times 2$, не более 4 чёрных кубиков. Какое наибольшее количество чёрных кубиков могло быть использовано?

(Ю. А. Хромин)

Ответ. $(N + 1)^2(4N + 1)$.

Решение. Положим $k = (N + 1)^2(4N + 1)$. Введём систему координат так, что все вершины единичных кубиков будут иметь целые координаты от 0 до $2N + 1$.

Начнём с примера, показывающего, что количество чёрных кубиков действительно может быть равно k . У каждого кубика рассмотрим его вершину, ближайшую к началу координат (её координаты принимают значения от 0 до $2N$). Пусть кубик чёрный, если хотя бы две координаты этой вершины чётны, и белый иначе. Ясно, что тогда в любом кубе $2 \times 2 \times 2$ будет ровно 4 чёрных и 4 белых кубика. При этом количество чёрных ку-

биков, у которых все три соответствующих координаты чётны, равно $(N + 1)^3$, а количество кубиков, у которых чётны ровно две координаты, равно $3(N + 1)^2N$, поэтому общее количество чёрных кубиков будет равно k .

Осталось доказать, что этот пример оптимальный. Пусть куб сложен из чёрных и белых кубиков так, что выполнены условия задачи. Назовём кубик *тёмным* или *светлым*, если он является соответственно чёрным или белым в приведённом выше примере.

Для каждой точки с координатами (a, b, c) в большом кубе назовём её x -, y - и z -рангом числа $r_x = \min(a, 2N + 1 - a)$, $r_y = \min(b, 2N + 1 - b)$ и $r_z = \min(c, 2N + 1 - c)$ соответственно. Назовём *рангом* этой точки число $r = \min(r_x, r_y, r_z)$. Иначе говоря, x -, y - или z -ранг точки — это расстояние от неё до ближайшей грани большого куба, перпендикулярной соответствующей оси, а её ранг — это просто расстояние от неё до ближайшей грани большого куба.

Отметим все вершины единичных кубиков с нечётными рангами. Для каждой отмеченной вершины рассмотрим разность количеств чёрных и белых кубиков, сходящихся в этой вершине; поскольку все эти вершины являются центрами кубов $2 \times 2 \times 2$, эта разность неположительна. Значит, и сумма Σ всех таких разностей неположительна.

Скажем, что *кратность* единичного кубика — это количество его отмеченных вершин (столько раз этот кубик учтён в Σ). Тогда Σ равна разности суммы всех кратностей чёрных кубиков и суммы кратностей всех белых кубиков. Поэтому нам достаточно доказать, что если такая разность неположительна, то количество чёрных кубиков ℓ не превосходит k .

Пусть r_x , r_y и r_z — это x -, y - и z -ранги центра некоторого кубика; пусть для определённости $r_x \leq r_y \leq r_z$. Тогда нетрудно видеть, что

- если $r_x < r_y$, то кратность этого кубика равна 4;
- если $r_x = r_y = 1/2 + d$, где d чётно, то кратность кубика меньше 4, и он тёмный;
- если $r_x = r_y = 1/2 + d$, где d нечётно, то кратность кубика больше 4, и он светлый.

Итак, кратности всех тёмных кубиков не больше 4, а всех светлых — не меньше 4.

Пусть теперь $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{(2N+1)^3}$ — кратности всех кубиков, расположенные в неубывающем порядке. Из сказанного выше вытекает, что $s_1 + s_2 + \dots + s_k - s_{k+1} - \dots - s_{(2N+1)^3} = 0$, поскольку в приведённом выше примере значение Σ было равно 0.

Если теперь в рассматриваемой раскраске $\ell > k$ чёрных кубиков, то

$$\begin{aligned} 0 \geq \Sigma &\geq s_1 + s_2 + \dots + s_\ell - s_{\ell+1} - s_{\ell+2} - \dots - s_{(2N+1)^3} > \\ &> s_1 + s_2 + \dots + s_k - s_{k+1} - \dots - s_{(2N+1)^3} = 0, \end{aligned}$$

поскольку $s_{k+1} \geq 4$. Это противоречие показывает, что $\ell \leq k$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оценку можно доказать и по-другому — например, так.

Рассмотрим четыре вершины большого куба A, B, C, D , образующие правильный тетраэдр. Отметим вершину единичного кубика, если у вектора, соединяющего её с ближайшей к ней вершиной из A, B, C и D , все координаты нечётны. Пусть p — количество отмеченных вершин, а q — количество единичных кубиков, не имеющих отмеченной вершины. Тогда количество чёрных кубиков не превосходит $4p + q$.

Осталось выяснить, что $4p + q = k$. Это можно сделать непосредственно; но вместо этого можно воспользоваться той же схемой, что и в решении выше. Именно, нетрудно заметить, что если у единичного кубика есть две отмеченных вершины, то он светлый, а если нет отмеченных вершин, то он тёмный. Тогда рассуждение выше работает с несложными изменениями.