Материалы для проведения заключительного этапа

LI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2024–2025 учебный год

Второй день

Сириус, 16–22 апреля 2025 г.

Москва, 2025

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа LI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, Н. Ю. Власова П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. Г. Храмцов, Г. М. Шарафетдинова, Г. Р. Челноков.

А также А. В. Антропов, И. А. Ефремов, П. Ю. Козлов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, А. И. Храбров, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, а точки A_1 и A_2 — соответственно вершины парабол $y = P_1(x)$ и $y = P_2(x)$. Через $m(g(x))$ будем обозначать наименьшее значение функции $g(x)$. Известно, что разности $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x))$ и $m(P_2(P_1(x))) - m(P_2(x))$ оказались равными положительными числами. Найдите угол между прямой A_1A_2 и прямой, содержащей ось Ox. (*Н. Х. Агаханов*)

Ответ. 45°.

Решение. Пусть данные трёхчлены — $P_1(x) = (x-x_1)^2+y_1$ и $P_2(x) = (x-x_2)^2+y_2$, где $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ — координаты вершин парабол. Тогда $m(P_1(x)) = y_1$, а $P_1(P_2(x)) = ((x-x_2)^2+y_2-x_1)^2+y_1$. Если $y_2 \leqslant x_1$, то минимальное значение выражения $((x-x_2)^2+y_2-x_1)^2$ равняется нулю, откуда $m(P_1(P_2(x)))-m(P_1(x)) = y_1-y_1 = 0$. Последнее противоречит тому, что $m(P_1(P_2(x)))-m(P_1(x))$ — положительное число. Таким образом, $y_2 > x_1$, откуда $m(P_1(P_2(x))) = (y_2-x_1)^2+y_1$ и $m(P_1(P_2(x)))-m(P_1(x)) = (y_2-x_1)^2$.

Аналогично, $y_1 > x_2$ и $m(P_2(P_1(x)))-m(P_2(x)) = (y_1-x_2)^2$. Теперь условие равенства разностей переписывается в виде $(y_1-x_2)^2 = (y_2-x_1)^2$. Отсюда, поскольку $y_2 > x_1$ и $y_1 > x_2$, получаем $y_1-x_2 = y_2-x_1$, то есть $y_2-y_1 = -(x_2-x_1)$. Значит, искомый угол равен 45°.

9.6. Петя выбрал 100 попарно различных положительных чисел, меньших 1, и расставил их по кругу. Затем он проделывает с ними операции. За одну операцию можно взять три стоящих подряд (именно в таком порядке) числа a, b, c и заменить число b на $a-b+c$. При каком наибольшем k Петя мог выбрать исходные числа и сделать несколько операций так, чтобы после них среди чисел оказалось k целых? (*С. Л. Берлов*)

Ответ. При $k = 50$.

Решение. *Оценка.* Покажем, что целых чисел никогда не станет больше 50.

Будем следить за разностями между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Если подряд стояли числа a, b и c, то их разности были равны $a-b$ и $b-c$. После применения операции к числу b получатся числа a, $a-b+c$ и c, разности которых равны $a-(a-b+c)=b-c$ и $(a-b+c)-c=a-b$. Итак, в результате операции две соседние разности просто переставляются местами. Изначально все разности были нецелыми, поэтому они в любой момент времени будут нецелыми. Таким образом, два целых числа никогда не могут появиться рядом и, значит, их будет не больше 50.

Пример. Для начала расставим по кругу попеременно числа 0,1 и 0,2. Если с каждым числом 0,2 проделать операцию, то оно будет заменено на $0{,}1-0{,}2+0{,}1=0$, и числа через одно будут целыми.

Осталось подправить пример так, чтобы все числа стали различными. Для этого достаточно прибавить к каждому числу 0,1 по своему маленькому числу, а к каждому числу 0,2 — сумму чисел, прибавленных к его соседям. Например, выбрав $t=0{,}001$, можно прибавить к последовательным числам 0,1 числа $0, t, 2t, \ldots, 47t, 48t, 50t$; тогда к числам 0,2 будут прибавляться числа $t, 3t, 5t, \ldots, 95t, 98t, 50t$. В результате все числа станут различными.

Явно построенный пример выглядит так:

$$0{,}1 \quad 0{,}2001 \quad 0{,}1001 \quad 0{,}2003 \quad 0{,}1002 \quad 0{,}2005 \quad 0{,}1003 \quad \ldots$$
$$\ldots \quad 0{,}1047 \quad 0{,}2095 \quad 0{,}1048 \quad 0{,}2098 \quad 0{,}105 \quad 0{,}205$$

9.7. В строку выписаны числа 1, 2, 3, …, 60 (ровно в таком порядке). Игорь и Руслан по очереди ставят знаки $+$, $-$ и $\times$ между ними, начинает Игорь; за ход каждый ставит один знак. Когда между каждыми двумя соседними числами поставлен знак, вычисляется значение полученного выражения. Если оно делится на 3, то победа присуждается Игорю, иначе Руслану. Кто из игроков может выиграть, независимо от действий соперника?

(*И. А. Ефремов*)

Ответ. Игорь.

Решение. Заменим все числа в строке на их остатки от деления на 3, от этого результат игры не изменится. Получим строку 1, 2, 0, …, 1, 2, 0. Промежутки между числами пронумеруем слева направо от 1 до 59.

Первым ходом Игорь ставит знак «$-$» в 30-й промежуток, а все остальные промежутки он разбивает на пары вида $(i, 30+i)$. Если Руслан ставит в какой-то промежуток знак «$+$» или «$-$», то Игорь в парный промежуток ставит «$-$» или «$+$», соответственно. А если Руслан ставит знак «$\times$», то Игорь ставит в парный промежуток также знак «$\times$».

Когда все знаки расставлены, полученное выражение разбивается на несколько слагаемых. При этом в левой и правой половинах выражения набор слагаемых одинаковый, но берутся они с противоположными знаками. Следовательно, его значение будет давать остаток 0 при делении на 3.

9.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2, равны. *(К. А. Бельский)*

Решение. Начнём со следующей полезной леммы.

Лемма. *Пусть точки F и E выбраны соответственно на сторонах AB и AC параллелограмма $ABKC$ так, что $BE = CF$. Тогда точка K равноудалена от прямых BE и CF (см. рис. 3).*

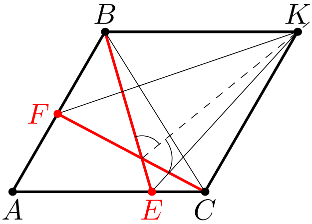


Рис. 1

Доказательство. Поскольку $BK \parallel EC$ и $CK \parallel FB$, имеем $S_{KBE} = S_{KBC} = S_{KFC}$. Так как $BE = CF$, отсюда и следует, что расстояния от точки K до прямых BE и CF равны. $\square$

Перейдём к решению. Пусть прямые из условия образуют треугольники $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ (точки обозначены как на рис. 4).

Выберем точку K так, что $ABKC$ — параллелограмм; согласно лемме, точка K равноудалена от прямых BE_1, CF_1, BE_2 и CF_2; значит, существует окружность с центром K, касающаяся этих прямых в некоторых точках P_1, Q_1, P_2 и Q_2 соответ-

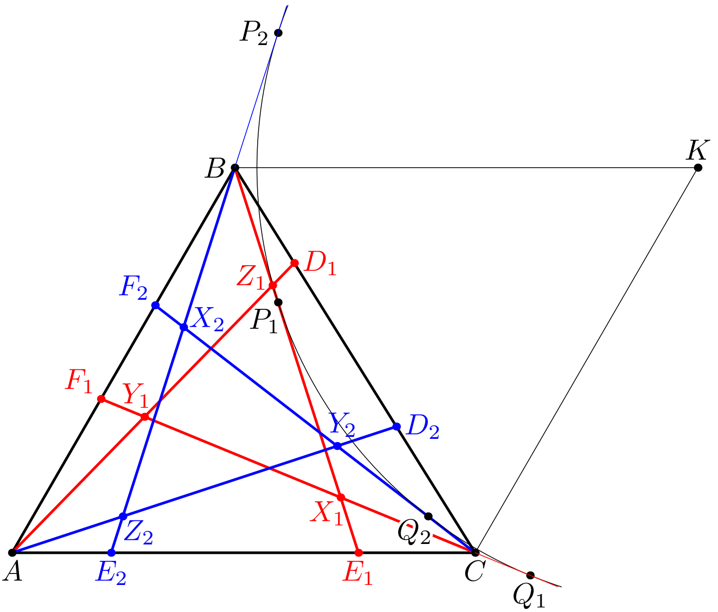


Рис. 2

ственно. Тогда из равенств отрезков касательных вытекает, что

$$BX_1 - CX_1 = BP_1 + X_1P_1 - X_1Q_1 + CQ_1 = BP_2 + CQ_2 = \\ = BP_2 - X_2P_2 + X_2Q_2 + CQ_2 = CX_2 - BX_2.$$

Аналогично получаем, что $CY_1 - AY_1 = AY_2 - CY_2$ и $AZ_1 - BZ_1 = BZ_2 - AZ_2$. Складывая полученные три равенства, получаем требуемое равенство периметров.

10 класс

10.5. Дано натуральное число n. Натуральные числа $1, 2, \ldots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n-1$ выписанных на листке чисел? (*И. И. Богданов*)

Ответ. $\lfloor n/2 \rfloor$.

Решение. *Оценка.* Предположим, что какое-то из выписанных на листке чисел больше $\lfloor n/2 \rfloor$, скажем, НОД$(a, b) = d > \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда наибольшее из чисел a, b не меньше $2d$, что больше n — противоречие. Значит, каждый из написанных НОДов не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, потому количество различных НОДов не может превышать $\lfloor n/2 \rfloor$.

Пример. Разобьём все числа от 1 до n на цепочки вида $a, 2a, 4a, 8a, \ldots, 2^k a$, где a — нечётное число, не превосходящее n. Выпишем в строчку цепочки одну за другой. Тогда для любого натурального $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ найдётся цепочка, в которой встречается d, а следующее за d число будет $2d$. Видим, что каждое натуральное $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ будет выписано на листке.

10.6. При каком наименьшем k для любого многочлена $f(x)$ степени 100 с вещественными коэффициентами найдётся такой многочлен $g(x)$ степени не выше k с вещественными коэффициентами, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют ровно 100 общих точек? (*А. С. Кузнецов*)

Ответ. 98.

Решение. Положим $n = 100$.

1. Покажем, как подобрать нужный многочлен g степени не выше $n-2$ для данного многочлена f степени n. При домножении f на ненулевую константу условие не поменяется (g можно домножить на ту же константу), поэтому считаем, что старший коэффициент f равен 1, так что $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Возьмём произвольный набор n различных чисел $x_1, \ldots, x_n$, дающих в сумме $-a_1$, и положим $h(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$, $g(x) = f(x) - h(x)$, так что $h = f - g$. Видим, что у f и h совпадают коэффициенты при x^n и при x^{n-1}, поэтому степень

g не превышает $n-2$. С другой стороны, абсциссы точек пересечения графиков f и g — это в точности корни многочлена h, а их ровно n.

2. Покажем, что $k \leqslant n-3$ не работает. Пусть дан многочлен $f(x) = x^n$, а $g(x)$ — многочлен степени не выше $n-3$. Предположим, что графики f и g пересекаются в n точках, имеющих абсциссы $x_1, \ldots, x_n$. Но тогда многочлен $f-g$ степени n имеет n вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$. С другой стороны, у $f-g$ коэффициенты при x^{n-1} и x^{n-2} равны 0. Но тогда по теореме Виета сумма $s_1 = x_1 + \ldots + x_n$ и сумма попарных произведений $s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$ равны 0. Отсюда $x_1^2+\ldots+x_n^2 = s_1^2-2s_2 = 0$, следовательно $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, что противоречит тому, что x_i различны.

10.7. В программу соревнования входит 25 видов спорта, в каждом из которых определяется один победитель, получающий золотую медаль. В соревновании участвуют 25 спортсменов, каждый — во всех 25 видах спорта. Имеется 25 экспертов, каждый из которых должен сделать *прогноз*, сколько золотых медалей получит каждый спортсмен, при этом в его прогнозе количества медалей должны являться целыми неотрицательными числами с суммой 25. Эксперта признают *компетентным*, если он верно угадает количество золотых медалей хотя бы у одного спортсмена. При каком наибольшем k эксперты могут сделать такие прогнозы, что хотя бы k из них будут признаны компетентными независимо от исхода соревнования? (*М. М. Федотова*)

Ответ. 24.

Решение. *Оценка.* Покажем, что $k \leqslant 24$, т. е. что любой эксперт может оказаться некомпетентным. Если этот эксперт считает, что все спортсмены возьмут по одной медали, опровергнем его результатом (25, 0, 0, . . . , 0). Иначе эксперт считает, что несколько (хотя бы один) спортсменов получат 0 медалей. Тогда распределим все медали между этими спортсменами так, чтобы каждый из них получил хотя бы одну медаль. В таком случае эксперт не угадает ни одного количества медалей.

Пример. Пусть прогноз одного эксперта — $(1, 1, 1, \ldots, 1)$, а прогнозы остальных — $(1, 0, \ldots, 0, 24)$, $(0, 1, \ldots, 0, 24)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1, 24)$ (на последнем месте 24, и ещё одна единица).

Если некомпетентным оказался первый эксперт, то в исходе точно есть хотя бы три нуля, иначе хотя бы в 23 позициях количество медалей не меньше 2, и тогда общее количество медалей не меньше $23 \cdot 2 > 30$ — противоречие. Но тогда каждый из остальных экспертов компетентный.

Предположим теперь, что двое экспертов, отличных от первого, оказались некомпетентными. Тогда в двух позициях их прогнозы — 0 и 1 медалей, а значит, в реальном исходе в этих позициях не менее 2 медалей. Кроме того, ещё в 22 позициях прогнозы обоих экспертов — нули, значит, в реальном исходе в этих позициях не менее 1 медали. Тогда общее количество медалей не меньше $2 \cdot 2 + 22 \cdot 1 > 25$ — противоречие.

10.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2, равны. (*К. А. Бельский*)

Решение. Начнём со следующей полезной леммы.

Лемма. *Пусть точки F и E выбраны соответственно на сторонах AB и AC параллелограмма $ABKC$ так, что $BE = CF$. Тогда точка K равноудалена от прямых BE и CF (см. рис. 3).*

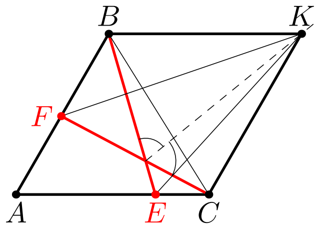


Рис. 3

Доказательство. Поскольку $BK \parallel EC$ и $CK \parallel FB$, имеем $S_{KBE} = S_{KBC} = S_{KFC}$. Так как $BE = CF$, отсюда и следует, что расстояния от точки K до прямых BE и CF равны. $\square$

Перейдём к решению. Пусть прямые из условия образуют треугольники $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ (точки обозначены как на рис. 4).

Выберем точку K так, что $ABKC$ — параллелограмм; согласно лемме, точка K равноудалена от прямых BE_1, CF_1, BE_2 и CF_2; значит, существует окружность с центром K, касающаяся этих прямых в некоторых точках P_1, Q_1, P_2 и Q_2 соответственно. Тогда из равенств отрезков касательных вытекает, что

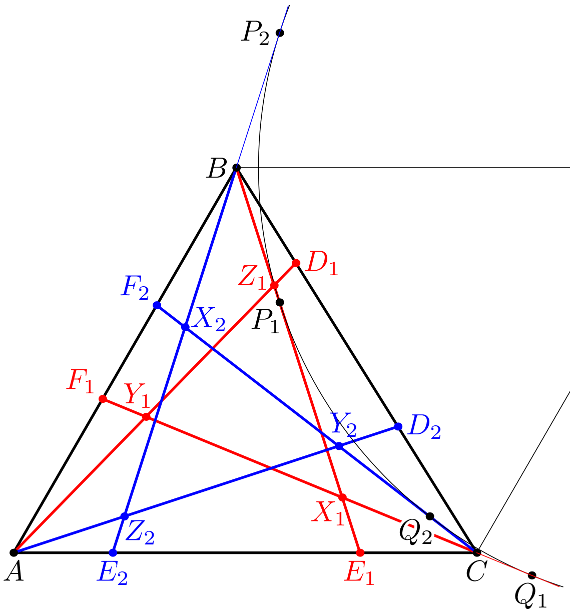


Рис. 4

$$BX_1 - CX_1 = BP_1 + X_1P_1 - X_1Q_1 + CQ_1 = BP_2 + CQ_2 =$$
$$= BP_2 - X_2P_2 + X_2Q_2 + CQ_2 = CX_2 - BX_2.$$

Аналогично получаем, что $CY_1 - AY_1 = AY_2 - CY_2$ и $AZ_1 - BZ_1 = BZ_2 - AZ_2$. Складывая полученные три равенства, получаем требуемое равенство периметров.

11 класс

11.5. Дано натуральное число n. Натуральные числа $1, 2, \ldots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n-1$ выписанных на листке чисел? (*И. И. Богданов*)

Ответ. $\lfloor n/2 \rfloor$.

Решение. *Оценка.* Предположим, что какое-то из выписанных на листке чисел больше $\lfloor n/2 \rfloor$, скажем, НОД$(a, b) = d > \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда наибольшее из чисел a, b не меньше $2d$, что больше n — противоречие. Значит, каждый из написанных НОДов не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, потому количество различных НОДов не может превышать $\lfloor n/2 \rfloor$.

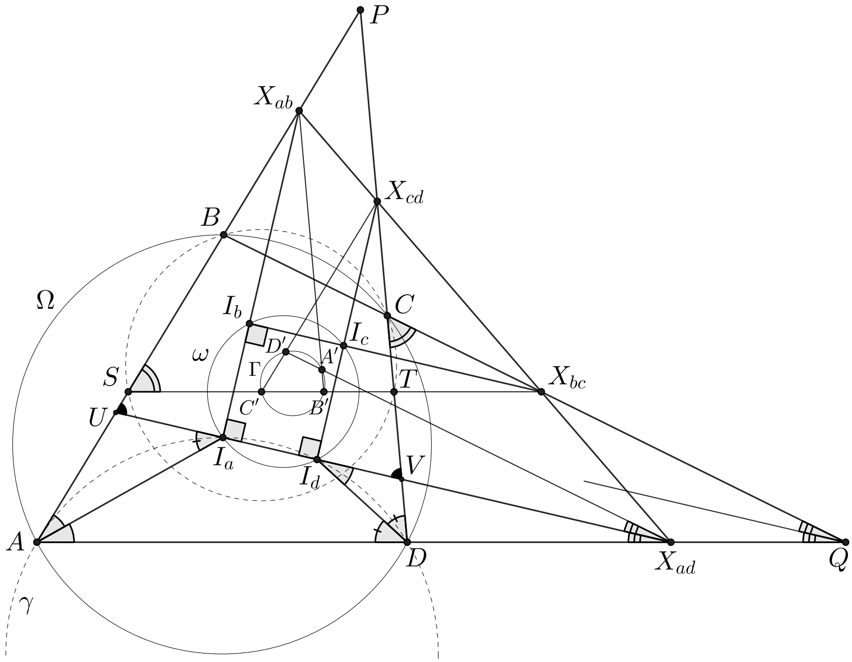
Пример. Разобьём все числа от 1 до n на цепочки вида $a, 2a, 4a, 8a, \ldots, 2^k a$, где a — нечётное число, не превосходящее n. Выпишем в строчку цепочки одну за другой. Тогда для любого натурального $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ найдётся цепочка, в которой встречается d, а следующее за d число будет $2d$. Видим, что каждое натуральное $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ будет выписано на листке.

11.6. По кругу выписаны 100 единиц. Петя и Вася играют в игру, каждый делает по 10^{10} ходов. Петя каждым своим ходом выбирает 9 стоящих подряд чисел и уменьшает каждое из них на 2. Вася каждым своим ходом выбирает 10 стоящих подряд чисел и увеличивает каждое из них на 1. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Докажите, что Вася сможет действовать так, чтобы после каждого его хода среди 100 выписанных чисел было не менее пяти положительных, как бы ни играл Петя. (*С. Л. Берлов*)

Решение. Обозначим записанные по кругу числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100}. Вася будет следить лишь за десятью числами, которые он разобьёт на пары: (a_9, a_{18}), (a_{27}, a_{36}), $\ldots$, (a_{90}, a_{99}). За один ход Петя может уменьшить не более чем одно из этих 10 чисел. Если Петя уменьшил одно из чисел пары (a_i, a_{i+9}), Вася в ответ добавит 1 к числам a_i, a_{i+1}, $\ldots$, a_{i+9}. Если же Петя не уменьшил ни одно из этих 10 чисел, Вася сделает любой разрешённый ход. Таким образом, после пары ходов Пети и Васи сумма чисел в каждой из пяти Васиных пар не уменьшится. Поскольку изначально пять сумм в парах положительны, то после каждого Васиного хода сумма в каждой из этих пяти пар будет положительной, поэтому в каждой из пар будет хотя бы одно положительное число. Таким образом, после любого Васиного хода будет хотя бы 5 положительных чисел, что и требовалось.

11.7. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность Ω. В треугольники DAB, ABC, BCD, CDA вписаны окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ соответственно. Проведены общие внешние касательные к окружностям ω_a и ω_b, ω_b и ω_c, ω_c и ω_d, ω_d и ω_a, не содержащие сторон четырёхугольника $ABCD$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на четырёх проведённых прямых (именно в таком порядке), вписан в окружность Γ. Докажите, что прямые, соединяющие центры окружностей ω_a и ω_c, ω_b и ω_d, Ω и Γ, пересекаются в одной точке. (*А. С. Кузнецов*)

Решение. Пусть, не умаляя общности, лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q. Обозначим центр окружности ω_a через I_a, точки I_b, I_c, I_d определим аналогично. Обозначим четырёхугольник, образованный четырьмя касательными через $A'B'C'D'$ (прямая $A'B'$ — общая внешняя касательная к ω_a и ω_b, аналогично с тремя другими сторонами).



В силу леммы о трезубце для треугольников ABD и ACD, точки A, D, I_a, I_d лежат на одной окружности (с центром в середине дуги AD окружности Ω). Пусть прямая I_aI_d пересекает стороны AB и CD в точках U и V, а также пересекает прямую AD в точке X_{ad}. Обозначим в четырёхугольнике $ABCD$: $\angle A = \alpha$, $\angle D = \delta$. Тогда в силу вписанности четырёхугольников $ABCD$ и AI_aI_dD, выполняются равенства углов: $\angle QCD = \alpha$, $\angle UI_aA = \angle ADI_d = \delta/2$, $\angle VI_dD = \angle DAI_a = \alpha/2$. Следовательно, $\angle CQD = \delta - \alpha$ и $\angle PUV = \angle PVU = (\alpha + \delta)/2$. В частности, $\alpha < \delta$, поэтому точка X_{ad} лежит на луче AD и $\angle DX_{ad}I_d = \angle ADV - \angle PVU = (\delta - \alpha)/2$. Последнее равенство означает, что прямая I_aI_d параллельна биссектрисе угла CQD. Поскольку прямая $A'D'$ симметрична прямой AD относительно линии центров I_aI_d, мы получаем, что $A'D' \parallel BC$, а также прямая $A'D'$ проходит через точку X_{ad}. Определим аналогично точки X_{ab}, X_{bc}, X_{cd} и получим, что эти точки лежат на прямых $A'B', B'C', C'D'$, которые параллельны сторонам четырёхугольника $ABCD$.

Как мы поняли выше, прямая I_aI_d параллельна биссектрисе угла CQD. Рассуждая аналогично, мы получаем, что этой биссектрисе параллельна прямая I_bI_c, а прямые I_aI_b и I_cI_d параллельны биссектрисе угла BPC. Поскольку $\angle PUV = \angle PVU$, то биссектриса угла BPC перпендикулярна прямой I_aI_d. Таким образом, соседние стороны четырёхугольника $I_aI_bI_cI_d$ перпендикулярны, то есть это прямоугольник. Значит, он вписан в окружность, обозначим её через ω, центр которой — точка пересечения диагоналей. Таким образом, достаточно доказать, что центры окружностей ω, Ω и Γ лежат на одной прямой. Мы докажем, что у этих трёх окружностей общая радикальная ось, причём на ней лежат точки $X_{ab}, X_{bc}, X_{cd}, X_{da}$ $(\star)$.

Обозначим через γ описанную окружность четырёхугольника AI_aI_dD. Тогда точка X_{ad} — радикальный центр окружностей γ, ω и Ω, поскольку она лежит на двух их радикальных осях. Значит, радикальная ось окружностей ω и Ω проходит через точку X_{ad}, аналогично, на ней лежат и точки X_{ab}, X_{bc}, X_{cd}. В частности, эти 4 точки лежат на одной прямой.

Пусть прямая $B'C'$ пересекает сторону AB в точке S и сторону CD в точке T. Поскольку $B'C' \parallel AD$, то $\angle BST = \angle BAD = 180^\circ - \angle BCT$, поэтому четырёхугольник $BCTS$ — вписанный. Поскольку $C'D' \parallel AB$ и $A'B' \parallel CD$, то по теореме Фалеса

$$\frac{X_{bc}B'}{X_{bc}T} = \frac{X_{bc}X_{ab}}{X_{bc}X_{cd}} = \frac{X_{bc}S}{X_{bc}C'}.$$

Из этого равенства отношений и вписанности $BCTS$ мы получаем, что $X_{bc}B' \cdot X_{bc}C' = X_{bc}S \cdot X_{bc}T = X_{bc}B \cdot X_{bc}C$, то есть степень точки X_{bc} относительно окружностей Ω и Γ одинакова. Рассуждение для точек X_{ab}, X_{ad}, X_{cd} аналогично. Итого доказано утверждение $(\star)$, что и требовалось.

11.8. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. *Хордой* будем называть отрезок целой длины, параллельный оси абсцисс, концы которого лежат на графике функции f. Известно, что у графика функции f ровно N хорд, причём среди них есть хорда длины 2025. Найдите наименьшее возможное значение N.

(*А. С. Кузнецов*)

Ответ. 4049.

Решение. Для натурального n положим $g_n(x) = f(x+n) - f(x)$. Тогда число хорд длины n равно количеству нулей функции $g_n(x)$.

В качестве *примера* выберем следующую кусочно-линейную функцию f: $f(x) = x$ при $x \leqslant 2024\frac{9}{10}$ и $f(x) = 20249 \cdot |2025 - x|$ при $x \geqslant 2024\frac{9}{10}$. Заметим, что при $a \notin \left[0; 2025\frac{1}{10}\right]$ функция $f(x)$ принимает значение $f(a)$ только в точке a. Следовательно, если $g_n(x) = 0$, то обе точки x и $x + n$ лежат в отрезке $\left[0, 2025\frac{1}{10}\right]$. В частности, $n \leqslant 2025$, и нули функции $g_n(x)$ лежат в промежутке $\left[0; 2025\frac{1}{10} - n\right]$. Для $n = 2025$ при $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ имеем, что $g_{2025}(x) = 20248x$. Значит, $g_{2025}(x)$ имеет единственный нуль $x = 0$, то есть хорда длины 2025 у функции f единственна. При натуральном $n \leqslant 2024$ функция $g_n(x)$ монотонно убывает при $x \in [0, 2025 - n]$ и монотонно возрастает при $x \in \left[2025 - n, 2025\frac{1}{10} - n\right]$, при этом $g_n(0) > 0$, $g_n(2025 - n) < 0$ и $g_n\left(2025\frac{1}{10} - n\right) > 0$. Таким образом, у этой функции ровно два нуля, то есть функция f имеет по две хорды длины $n = 1$, 2, …, 2024. Итого у неё 4049 различных хорд.

Теперь перейдём к *оценке*. Без ограничения общности будем считать, что хорда длины 2025 соединяет точки $(0; 0)$ и $(0; 2025)$, т. е. $f(0) = f(2025) = 0$. Положим $g(x) = g_1(x) = f(x+1) - f(x)$. Из условия следует, что у функции g конечное число нулей, а также эта функция непрерывна. Пусть все её нули лежат в промежутке $[-M, M]$. Тогда функция g знакопостоянна на лучах $x > M$ и $x < -M$. При необходимости, заменив функцию f на $-f$, мы будем считать, что $g(x) > 0$ при $x > M$.

Предположим, что $g(x) < 0$ при $x < -M$. Заметим, что $g_n(x) = g(x) + g(x+1) + \ldots + g(x+n-1)$, поэтому $g_n(x) > 0$ при $x > M$ и $g_n(x) < 0$ при $x < -M - n$. Значит, функция $g_n(x)$ имеет нуль, то есть у функции f есть хорда любой натуральной длины, что противоречит условию задачи.

Таким образом, $g(x) > 0$ при $x < -M$. Значит, $g_n(x) > 0$ при $x > M$ и при $x < -M - n$. Далее мы докажем, что при натуральных k и m, в сумме дающих 2025, функция f имеет хотя бы 4 хорды длин k и m. Применяя это утверждение для каждой такой пары k, m, мы получим заявленную оценку. Иными словами, мы докажем, что у функций $g_k(x)$ и $g_m(x)$ при $k+m=2025$ суммарно хотя бы 4 нуля. Предположим, что это не так. Тогда можно считать, что функция g_k имеет не более одного нуля. Значит, эта функция не может принимать отрицательных значений. Действительно, пусть $g_k(t)<0$. Поскольку функция $g_k(x)$ непрерывна и неотрицательна при достаточно больших по модулю значениях x, то у неё есть нуль на луче $(-\infty, t)$ и на луче (t, ∞), то есть хотя бы два нуля, противоречие.

Итого $g_k(x) \geqslant 0$, причём равенство нулю достигается не более чем в одной точке. Покажем, что $g_m(t)>0$ для некоторого $t \in (0, k)$. Рассмотрим наименьшее натуральное число N, для которого число Nk делится на 2025, и обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_{N-1}$ остатки чисел $k, 2k, \ldots, (N-1)k$ по модулю 2025. Если $g_k(0)>0$, положим $r_0=r_N=0$, если же $g_k(0)=0$, положим $r_0=r_N=2025$. Рассмотрим разности $d_j=f(r_{j+1})-f(r_j)$, $j=0,1,2, \ldots, N-1$. Заметим, что если $r_{j+1}>r_j$, то $r_{j+1}=r_j+k$ и $d_j=g_k(r_j) \geqslant 0$; если же $r_{j+1}<r_j$, то $r_j=r_{j+1}+(2025-k)=r_{j+1}+m$ и $d_j=-g_m(r_{j+1})$. Если $r_0=0$, то $d_0=g_k(0)>0$. В случае $r_N=2025$ мы получаем, что $d_{N-1}=g_k(2025-k)>0$, поскольку $g_k(0)=0$, а $2025-k \neq 0$. Таким образом, $d_0+d_1+\ldots+d_{N-1}=0$, и первое или последнее слагаемое в этой сумме положительно. Значит, найдётся отрицательное слагаемое $d_j<0$, что возможно лишь в ситуации $r_j=r_{j+1}+m$ и $d_j=-g_m(r_{j+1})$. Тогда для $t=r_{j+1} \in [0, k]$ мы получаем, что $g_m(t)=-d_j>0$.

Заметим, что $g_k(0)+g_m(k)=g_m(0)+g_k(m)=f(2025)-$ $-f(0)=0$. Поскольку функция g_k неотрицательна, то $g_m(0) \leqslant 0$ и $g_m(k) \leqslant 0$, в частности, $t \neq 0$ и $t \neq k$, поэтому $t \in (0, k)$. В случае, когда $g_k(0)>0$ и $g_k(m)>0$, мы получаем, что $g_m(0)<0$, $g_m(t)>0$, $g_m(k)<0$, а также функция $g_m(x)$ положительна при достаточно больших по модулю x. Значит, функция g_m имеет по нулю на промежутках $(-\infty, 0)$, $(0, t)$, $(t, k), (k, \infty)$, то есть уже эта функция имеет хотя бы 4 нуля. Если $g_k(0)=0$, то $g_k(m)>0$, поскольку у функции g_k не более одного нуля. Тогда $g_m(k)=0$,

$g_m(t) > 0$, $g_m(0) < 0$. В этом случае у функции g_m есть по нулю на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, t)$, а также нуль k, то есть хотя бы 3 нуля, и ещё один нуль в точке 0 есть у функции g_k, что в сумме составляет хотя бы 4 нуля. Случай $g_k(m) = 0$ разбирается аналогично.