

**8 класс****Первый день**

- 8.1. Даны числа  $a, b, c$ . Докажите, что хотя бы одно из уравнений  $x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0$ ,  $x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$ ,  $x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$  имеет решение.
- 8.2. В клетках таблицы  $10 \times 10$  произвольно расставлены натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Докажите, что за 35 ходов можно добиться того, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих в клетках с общей стороной, была составной.
- 8.3. На стороне  $BC$  ромба  $ABCD$  выбрана точка  $M$ . Прямые, проведенные через  $M$  перпендикулярно диагоналям  $BD$  и  $AC$ , пересекают прямую  $AD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Оказалось, что прямые  $PB, QC$  и  $AM$  пересекаются в одной точке. Чему может быть равно отношение  $BM/MC$ ?
- 8.4. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

**8 класс****Первый день**

- 8.1. Даны числа  $a, b, c$ . Докажите, что хотя бы одно из уравнений  $x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0$ ,  $x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$ ,  $x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$  имеет решение.
- 8.2. В клетках таблицы  $10 \times 10$  произвольно расставлены натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Докажите, что за 35 ходов можно добиться того, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих в клетках с общей стороной, была составной.
- 8.3. На стороне  $BC$  ромба  $ABCD$  выбрана точка  $M$ . Прямые, проведенные через  $M$  перпендикулярно диагоналям  $BD$  и  $AC$ , пересекают прямую  $AD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Оказалось, что прямые  $PB, QC$  и  $AM$  пересекаются в одной точке. Чему может быть равно отношение  $BM/MC$ ?
- 8.4. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

**9 класс****Первый день**

- 9.1. Приведенные квадратные трехчлены  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что уравнения  $f(g(x)) = 0$  и  $g(f(x)) = 0$  не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений  $f(f(x)) = 0$  и  $g(g(x)) = 0$  тоже не имеет вещественных корней.
- 9.2. На доске написали 100 дробей, у которых в числителях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу, и в знаменателях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу. Оказалось, что сумма этих дробей есть несократимая дробь со знаменателем 2. Докажите, что можно поменять местами числители двух дробей так, чтобы сумма стала несократимой дробью с нечетным знаменателем.
- 9.3. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном  $(2n + 1)$ -угольнике ( $n > 1$ ). Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с четным числом ранее проведенных диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?
- 9.4. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BB_1$ . Перпендикуляр из  $B_1$  на  $BC$  пересекает дугу  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $K$ . Перпендикуляр из  $B$  на  $AK$  пересекает  $AC$  в точке  $L$ . Докажите что точки  $K$ ,  $L$  и середина дуги  $AC$  (не содержащей точку  $B$ ) лежат на одной прямой.

**9 класс****Первый день**

- 9.1. Приведенные квадратные трехчлены  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что уравнения  $f(g(x)) = 0$  и  $g(f(x)) = 0$  не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений  $f(f(x)) = 0$  и  $g(g(x)) = 0$  тоже не имеет вещественных корней.
- 9.2. На доске написали 100 дробей, у которых в числителях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу, и в знаменателях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу. Оказалось, что сумма этих дробей есть несократимая дробь со знаменателем 2. Докажите, что можно поменять местами числители двух дробей так, чтобы сумма стала несократимой дробью с нечетным знаменателем.
- 9.3. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном  $(2n + 1)$ -угольнике ( $n > 1$ ). Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с четным числом ранее проведенных диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?
- 9.4. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BB_1$ . Перпендикуляр из  $B_1$  на  $BC$  пересекает дугу  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $K$ . Перпендикуляр из  $B$  на  $AK$  пересекает  $AC$  в точке  $L$ . Докажите что точки  $K$ ,  $L$  и середина дуги  $AC$  (не содержащей точку  $B$ ) лежат на одной прямой.

**10 класс****Первый день**

- 10.1. Грани куба  $9 \times 9 \times 9$  разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками  $2 \times 1$  (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечетно.
- 10.2. Дан многочлен  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ . Положим  $m = \min\{a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n\}$ . Докажите, что  $P(x) \geq mx^n$  при  $x \geq 1$ .
- 10.3. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BB_1$ . Перпендикуляр из  $B_1$  на  $BC$  пересекает дугу  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $K$ . Перпендикуляр из  $B$  на  $AK$  пересекает  $AC$  в точке  $L$ . Докажите что точки  $K$ ,  $L$  и середина дуги  $AC$  (не содержащей точку  $B$ ) лежат на одной прямой.
- 10.4. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из  $N$  цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем  $N$  фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

**10 класс****Первый день**

- 10.1. Грани куба  $9 \times 9 \times 9$  разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками  $2 \times 1$  (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечетно.
- 10.2. Дан многочлен  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ . Положим  $m = \min\{a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n\}$ . Докажите, что  $P(x) \geq mx^n$  при  $x \geq 1$ .
- 10.3. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BB_1$ . Перпендикуляр из  $B_1$  на  $BC$  пересекает дугу  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $K$ . Перпендикуляр из  $B$  на  $AK$  пересекает  $AC$  в точке  $L$ . Докажите что точки  $K$ ,  $L$  и середина дуги  $AC$  (не содержащей точку  $B$ ) лежат на одной прямой.
- 10.4. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из  $N$  цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем  $N$  фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

**11 класс****Первый день**

- 11.1. Докажите, что при
- $k > 10$
- в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos 2^k x$$

можно заменить один  $\cos$  на  $\sin$  так, что получится функция  $f_1(x)$ , удовлетворяющая при всех действительных  $x$  неравенству  $|f_1(x)| \leq \frac{3}{2^{k+1}}$ .

- 11.2. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно. Отрезок  $AA_1$  вторично пересекает вписанную окружность в точке  $Q$ . Прямая  $\ell$  параллельна  $BC$  и проходит через  $A$ . Прямые  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$  пересекают  $\ell$  в точках  $P$  и  $R$  соответственно. Докажите, что  $\angle PQR = \angle B_1QC_1$ .
- 11.3. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске  $N$ -значное число. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем  $N$  фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?
- 11.4. В бесконечной последовательности  $(x_n)$  первый член  $x_1$  — рациональное число, большее 1, и  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$  при всех натуральных  $n$ . Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

**11 класс****Первый день**

- 11.1. Докажите, что при
- $k > 10$
- в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos 2^k x$$

можно заменить один  $\cos$  на  $\sin$  так, что получится функция  $f_1(x)$ , удовлетворяющая при всех действительных  $x$  неравенству  $|f_1(x)| \leq \frac{3}{2^{k+1}}$ .

- 11.2. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно. Отрезок  $AA_1$  вторично пересекает вписанную окружность в точке  $Q$ . Прямая  $\ell$  параллельна  $BC$  и проходит через  $A$ . Прямые  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$  пересекают  $\ell$  в точках  $P$  и  $R$  соответственно. Докажите, что  $\angle PQR = \angle B_1QC_1$ .
- 11.3. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске  $N$ -значное число. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем  $N$  фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?
- 11.4. В бесконечной последовательности  $(x_n)$  первый член  $x_1$  — рациональное число, большее 1, и  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$  при всех натуральных  $n$ . Докажите, что в этой последовательности есть целое число.